ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΜΑ 4ο

Άσκηση 1η (GI V ALG 4 22787)

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητα του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0\alpha^t,\quad t\geq 0$, όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), *f(t)* η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί *a*, q_o είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_o στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί 0<a<1. (Μ 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

1. Να αποδείξετε ότι $a=\frac{1}{2}$ (Μ 5)
2. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές f(t) συναρτήσει της αρχικής τιμής q_o. (Μ 4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_o	$q_o/2$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $a=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{ης}$ ημέρας είναι 25mg.

1. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής (Μ 5)
2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασης της συνάρτησης f στο διάστημα [0, 6] (Μ 5)

Άσκηση 2η (GI V ALG 4 22790)

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι $Q(t)=8\cdot e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$ (Μ 10) β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μ 6)

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μ 9)

Άσκηση 3η (GI V ALG 4 22791)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot 2^x+\beta$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 3) και Β(2, 13).

α) Να αποδείξετε ότι α=5 και β=-7. (Μ 7)

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* με τον άξονα y’y (Μ 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς. (Μ 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x-31)<3$. (Μ 7)

Άσκηση 4η (GI V ALG 4 22794)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x+1 και η αριθμητική τιμή του για x=2 να είναι ίση με 12. (Μ 7)

β) Για α=-2 και β=3

1. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x-2. (Μ 5)
2. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le -x+14$ (Μ 7)
3. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)\le -\ln x+14$ (Μ 6)

Άσκηση 5η (GI V ALG 4 22796)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μ 4)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις f(x)>0 και g(x)<0. (Μ 8) γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g(\frac{2}{e})$. (Μ 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g(\sqrt{e}-1$. (Μ 7)

Άσκηση 6η (GI V ALG 4 22787)

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=log(x-2).

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μ 5)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$. (Μ 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$ (Μ 13)

Άσκηση 7η (GI V ALG 4 22799)

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας. (Μ 8)

β) Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$ όπου Vo και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς Vo και α. (Μ 8)

γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι $\log 5\simeq 0{,}7$ και $\log 85\simeq 1{,}93$) (Μ 9)

Άσκηση 8η (GI V ALG 4 22802)

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200\cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι $\log(1{,}64)\simeq 0{,}5$ και $\log 10\simeq 2{,}3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα (Μ 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$. (Μ 9) γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.   (Μ 9)

Άσκηση 9$^{\eta}$ (GI V ALG 4 22805)

Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t)=Q_0\cdot e^{-\lambda t}$, όπου Qo το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε μCb).

α) Αν τη χρονική στιγμή t=2ms το φορτίο είναι ίσο με το 1/4 της αρχικής του τιμής, να αποδείξετε ότι λ=ln2.   (Μ 8)

β) Αν τη χρονική στιγμή t=1ms το φορτίο είναι 60 μCb, να αποδείξετε ότι Qo=120mCb.   (Μ 8)

γ) Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15 μCb; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.   (Μ 9)

Άσκηση 10$^{\eta}$ (GI V ALG 4 22808)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(e^x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.   (Μ 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3ln2$ (Μ 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$ (Μ 9)

Άσκηση 11$^{\eta}$ (GI V ALG 4 22810)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.   (Μ 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=log3-log7$.   (Μ 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)>log3-log7$.   (Μ 9)

Άσκηση 12$^{\eta}$ (GI V ALG 4 22814)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=5x^3-8x^2+\alpha$ με α πραγματικό αριθμό.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-2 να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.   (Μ 8)

β) Για α=-8 να λύσετε την εξίσωση P(x)=0   (Μ 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(\ln^2 x+1)^3}{(\ln^2 x+1)+5}=\frac{8}{5}$.   (Μ 8)

Άσκηση 13η (GI V ALG 4 22816)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e \cdot x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.   (Μ5)

β) Να λύσετε την ανίσωση f(2x)<f(x).   (Μ 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{3}\cdot \eta\mu x)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$

(Μ 13)

Άσκηση 14η (GI V ALG 4 22819)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.   (Μ 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=2.   (Μ 8)

γ) Αν x>6 να λύσετε την ανίσωση f(x)>1.   (Μ 8)

Άσκηση 15η (GI V ALG 4 22820)

Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$

α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το 1/3 της αρχικής ποσότητας, να αποδείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$ (Μ 10)

β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.   (Μ 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι 1/81 κιλά.   (Μ 9)

Άσκηση 16η **(GI V ALG 4 22822)**

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(x-1)

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μ 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)=3\ln 2$. (Μ 10)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)\leq 3\ln 2$. (Μ 10)