

ΘΕΜΑ 4°

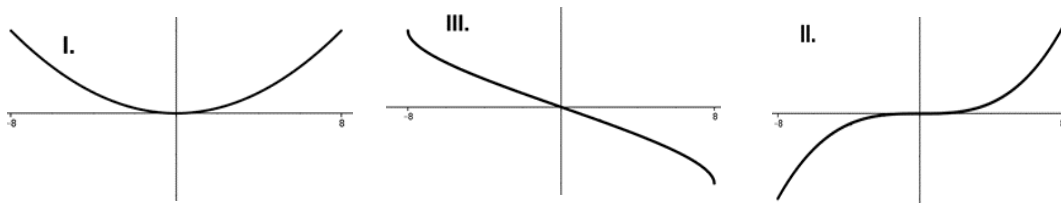
ΑΣΚΗΣΗ 1η (GI V ALG 4 17833)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (M 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (M8)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



(M 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-3$ και $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές. (M 5)

ΑΣΚΗΣΗ 2η (GI V ALG 4 17837)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|a+1|\eta\mu(\beta\pi x)$, όπου το a είναι πραγματικός αριθμός και το β θετικός, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $a=2$ ή $a=-4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (M 7)

β) Για $a=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$

1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$ (M 10)

2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 8]$. (M 8)

ΑΣΚΗΣΗ 3η (GI V ALG 4 17841)

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα πάρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματος τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$, $0 \leq t \leq 180$.

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες τα κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μ 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μ 3)

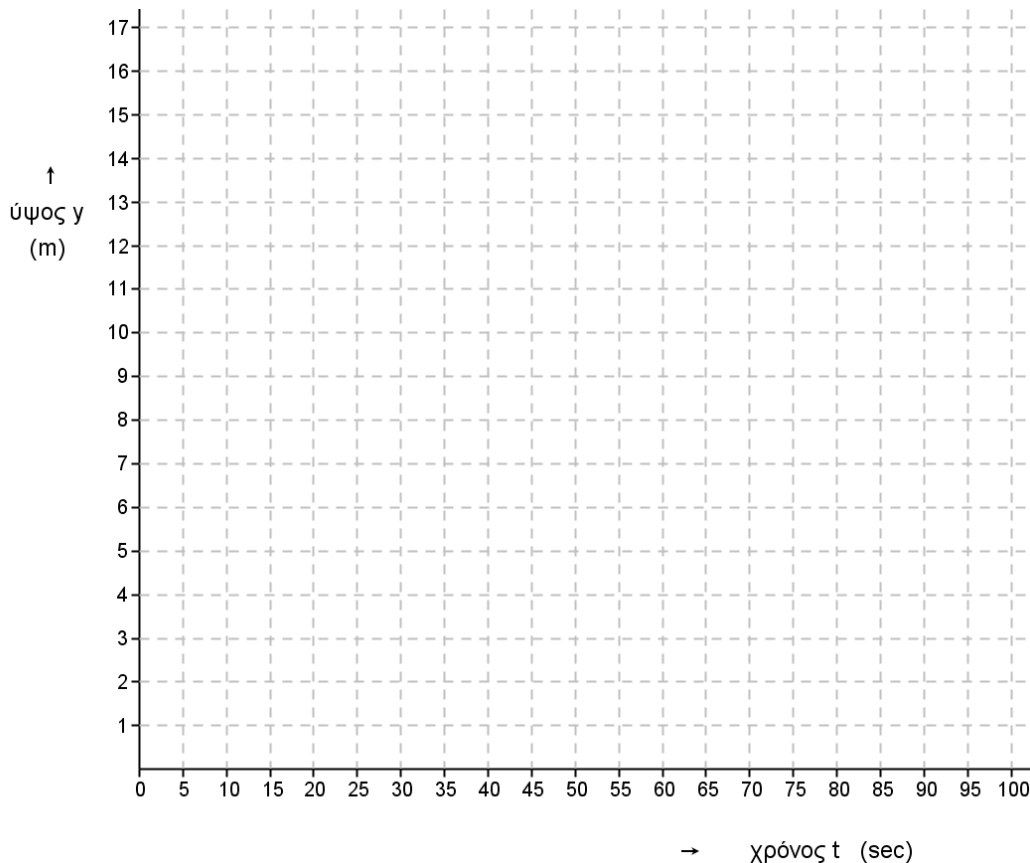
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή τον χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή (Μ 4). Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μ 2)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$. (Μ 3)

2. Να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$. (Μ 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



ΑΣΚΗΣΗ 4η (GI V ALG 4 17842)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 - d$, $x \in \mathbb{R}$ με c, d θετικές

σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$.

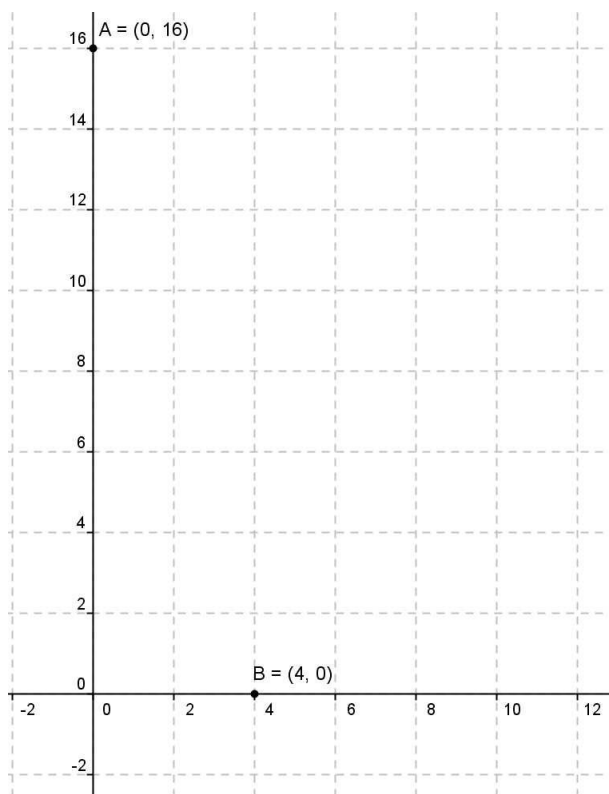
α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους. (Μ 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c=6$ και $d=2$,

1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μ 3).

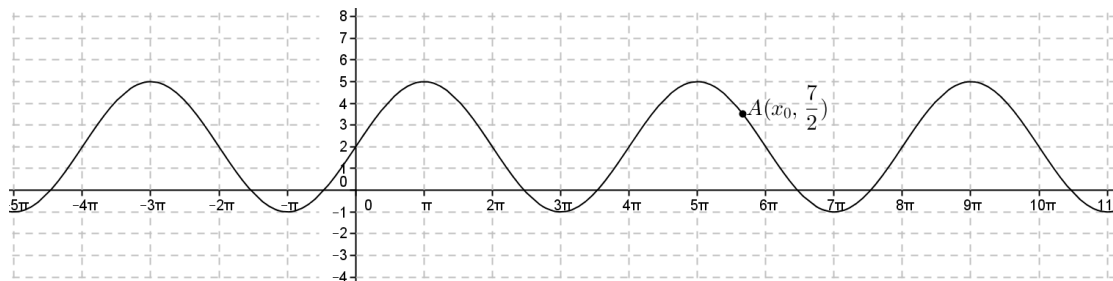
2. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πως αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ (Μ 6)

3. Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (Μ 6)



ΑΣΚΗΣΗ 5η (GI V ALG 4 17843)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + \kappa$, με ρ και κ πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$



α) Με βάση την γραφική παράσταση, να βρείτε:

1. Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μ 3)
2. Την περίοδο T της συνάρτησης f . (Μ 3)

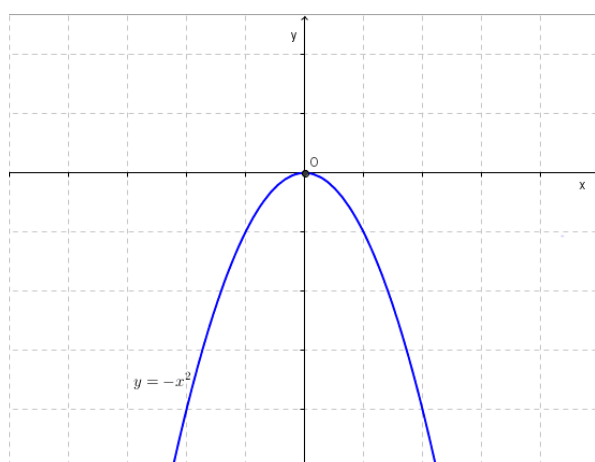
β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ , κ και ω και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μ 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho=3$, $\omega=\frac{1}{2}$ και $\kappa=2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μ 10)

ΑΣΚΗΣΗ 6η (GI V ALG 4 20332)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε πραγματικό αριθμό και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f . (Μ 10)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

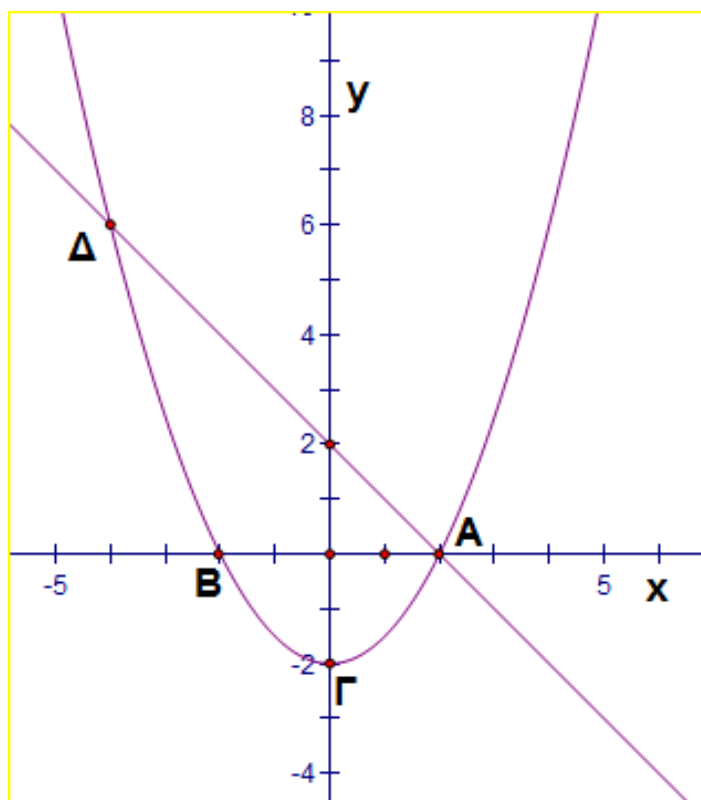
1. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μ 5)

2. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μ 5)

3. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=κ$, $κ<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μ 5)

ΑΣΚΗΣΗ 7η (GI V ALG 4 20334)

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x)=ax^2+bx+γ$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τα a , b , $γ$. (Μ 8)

β) Αν $a=\frac{1}{2}$, $β=0$ και $γ=-2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής. (Μ 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μ 9)

ΑΣΚΗΣΗ 8η (GI V ALG 4 20919)

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματοπλέγμα μήκους 40m για να περιφράξει έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών, χρησιμοποιώντας όλο το συρματοπλέγμα. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν. (Μ 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν του λαχανόκηπου, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x . (Μ 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (Μ 10)

ΑΣΚΗΣΗ 9η (GI V ALG 4 20924)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 8)$.

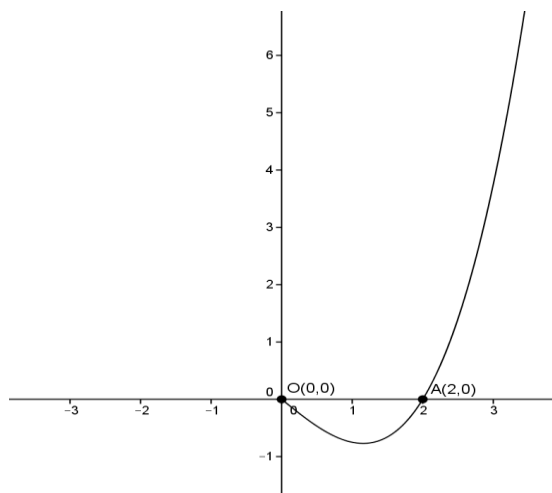
α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μ 8)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g .

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε το κ ($\kappa > 0$). (Μ 8)

ΑΣΚΗΣΗ 10η (ΓΙ V ALG 4 22759)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \gamma x + \delta$, $x \in \mathbb{R}$ και γ , δ πραγματικές σταθερές.



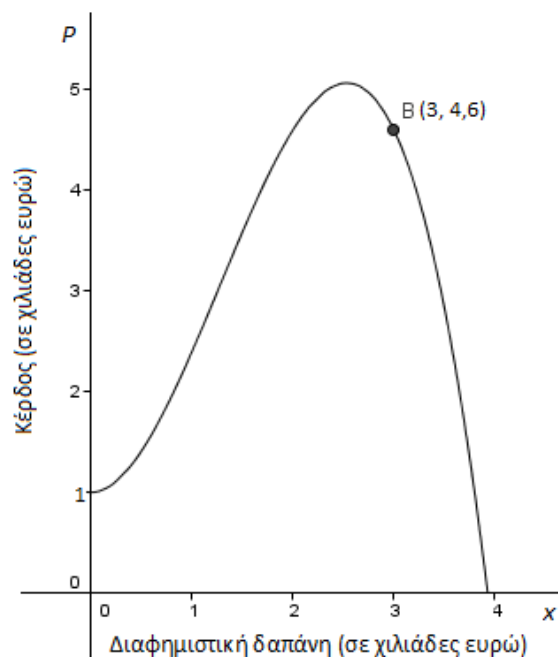
α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$. (Μ 5)

β) Θεωρώντας δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή (Μ 5)
2. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$ (Μ 5)
3. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -3/4$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -3/4$ και $f(x) = 3/4$ (Μ 10)

ΑΣΚΗΣΗ 11η (ΓΙ V ALG 4 22775)

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν $P(x) = -0,5x^3 + 1,9x^2 + 1$, όπου το x είναι πραγματικός αριθμός του διαστήματος $[0, 4)$, με x να αντιπροσωπεύει την διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) 1. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος (Μ 5)

2. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος 1. (Μ 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μ 10)

ΑΣΚΗΣΗ 12η (ΓΙ V ALG 4 22776)

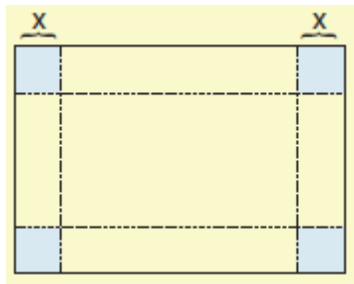
Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 8dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x , από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές (σχήμα 1)

α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. (Μ 6)

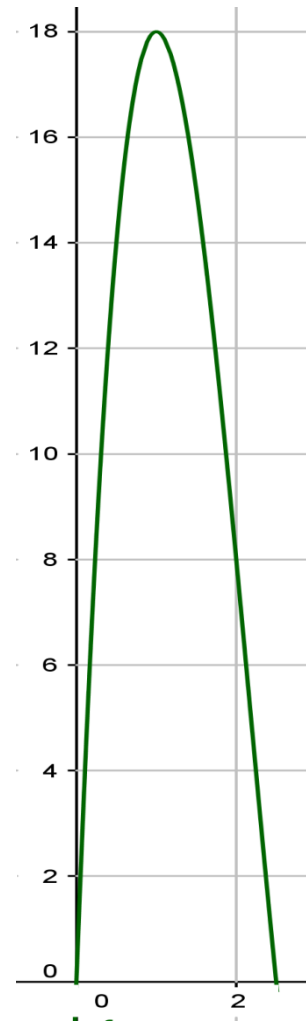
β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μ 5)

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8dm^3 . (Μ 7)

δ) Στο σχήμα 2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x)=4x^3-26x^2+40x$ για x στο διάστημα $(0, 2,5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο. (Μ 7)



σχήμα 1



σχήμα 2

ΑΣΚΗΣΗ 13η (GI V ALG 4 22777)

Στο σχήμα φαίνονται, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3-x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, -2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μ 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y=-3x+1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f . (Μ 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3-x^2 < -3x+1$
(Μ 9)

