2ο ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ : Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ : ΓΘΤ - ΓΟΠ

22 ΜΑΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση **f** παραγωγίσιμη σε διάστημα **(α, β)** με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $\boldsymbol{x_o}$**,** στο οποίο όμως η **f** είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ διατηρεί πρόσημο στο $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x_o}) \cup (\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{\beta})$, τότε το $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_o})$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο **(α, β).** **Μονάδες 7**

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Κάθε συνάρτηση **f** παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε διάστημα **Δ** , έχει $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > 0$ για κάθε **x** $\in \boldsymbol{\Delta}$**».**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος. (μονάδα **1**)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες **3**). **Μονάδες 4**

Α3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης **f** σε ένα διάστημα **Δ;** **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

$\boldsymbol{\alpha}$. *Η συνάρτηση* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^a}$ *αν* $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(\boldsymbol{0}, +\infty)$ *και ισχύει* $(\boldsymbol{x^{\alpha}})' = \boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}$

β. Αν $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^*$ τότε η **f** είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο **[α,β],** τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} > 0$

δ. Αν μια συνάρτηση **f** είναι γνησίως αύξουσα στο **[α, β],** και ισχύει: **f(α). f(β) < 0,** τότε η εξίσωση **f(x) = 0** , έχει μοναδική λύση.

ε. $\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_{u_1}^{u_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du}$, όπου **f, g'** είναι συνεχείς συναρτήσεις , **u = g(x), du=g'(x)dx** και $\boldsymbol{u_1} = \mathbf{g(\alpha)}$, $\boldsymbol{u_2} = \mathbf{g(\beta)}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση **f(x) = ln(x – lnx) + αx + β.**

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης **f.** **Μονάδες 3**

Β2. Αν η γραφική παράσταση της **f** εφάπτεται στον άξονα **x'x** στο **Α(1,0),** να βρείτε τις τιμές των **α** και **β.** **Μονάδες 5**

Αν **α = β = 0,** τότε :

Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο **(0,1]** και γνησίως αύξουσα στο **[1, +∞).** **Μονάδες 5**

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|x-1|}{f(x)+(x-1)^2}$ **Μονάδες 7**

Β5. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{e^{f(x)}}{x}dx$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση **f,** παραγωγίσιμη στο **R**, για την οποία ισχύει:

- **f ΄(x) + x = f(x) +1**, για κάθε $x \in R$
- **f(0) =1**

Γ1. Να αποδείξετε ότι **f(x) = x + e^{x},** για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 8**

Γ2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f. **Μονάδες 5**

Γ3. Έστω σημείο **M(x(t),y(t)),** το οποίο κινείται στη C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι **2μον/sec.** Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του **Μ** τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη στο **Μ** διέρχεται από το **O(0,0)** είναι **2e +2 μον/sec.** **Μονάδες 5**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **xe^{x} – e^{x} – e = 0** έχει ακριβώς μία ρίζα. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω **f: R→ R** μια συνάρτηση με **f(1) = 2** , η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή και ισχύει **f(x) ≥ 2**, για κάθε $x \in R$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 7**

Δ2. Στο διάστημα **(– 1 , +∞)** να λύσετε την εξίσωση : $f(e^x(x+1)^{x-1}) = 2$. **Μονάδες 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι **e^{x} ≥ x+1**, για κάθε $x \in R$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$f\left(e^{x^2}\right) \geq f(x^2+1)$, για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 5**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $4 + \int_0^1 x^2 f''(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$. **Μονάδες 6**

Οι Καθηγητές

Καρδακάς Δημήτριος

Λαφογιάννης Αναστάσιος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Θεωρήματος σελ **144**, περίπτωση **iii.**

Α2. α. Λάθος

β. Αν **f(x) =x³ ,** τότε **f '(x) =3x²** και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο **R,** χωρίς να έχει παράγωγο πάντα θετική αφού **f '(0) = 0.**

Α3. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης **f** σε ένα διάστημα **Δ είναι**

α. Τα εσωτερικά σημεία του **Δ** στα οποία η **f ''** μηδενίζεται και

β. Τα εσωτερικά σημεία του **Δ** στα οποία η δεν υπάρχει η **f ''.**

Α4. Σωστό – Λάθος – Σωστό – Λάθος – Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{lnx} > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{lnx} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{e^x} > \boldsymbol{x} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{e^x} > \boldsymbol{x} > 0 \end{matrix}\right\}$

ισχύει για **x > 0**. Άρα $\mathbf{D_f = (0, +\infty)}$

Β2. Πρέπει $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{f(1) = 0} \\ \boldsymbol{f'(1) = 0} \end{matrix}\right\}$

$\mathbf{f(1) = 0 \Leftrightarrow ln(1 - ln1) + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \ \ (1)}$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{(x - lnx)'}}{\boldsymbol{x - lnx}} + \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x - lnx}} + \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x - 1}}{\boldsymbol{x(x - lnx)}} + \boldsymbol{a}$$

$\mathbf{f'(1) = 0 \Leftrightarrow 0 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \ (2)}$

Από σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι **α = β = 0.**

Β3. $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{x - 1}}{\boldsymbol{x(x - lnx)}} > 0$

x > 0

x – lnx > 0 ισχύει από ερώτημα **Β1**

Άρα $\boldsymbol{f'(x)} > 0$ **⇔ x – 1 > 0 ⇔ x > 1**

	0		1		+∞
f'(x)		−		+	
f(x)		↘		↗	

και επειδή η f είναι συνεχής στο **1** είναι γνησίως φθίνουσα στο **(0,1]** και γνησίως αύξουσα στο **[1, +∞).**

Β4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|x-1|}{f(x)+(x-1)^2}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x-1| = -\infty$

$f(x) \geq f(1) = 0$, επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει στο **1** ολικό ελάχιστο.

Επίσης $(x-1)^2 \geq 0$.

Άρα $f(x) + (x-1)^2 \geq 0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)+(x-1)^2} = +\infty$

Άρα τελικά $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|x-1|}{f(x)+(x-1)^2} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

Β5. $\int_1^2 \frac{e^{f(x)}}{x}dx = \int_1^2 \frac{e^{\ln(x-\ln x)}}{x}dx = \int_1^2 \frac{x-\ln x}{x}dx = \int_1^2 \left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx =$

$1 - \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$

$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$, Θέτω $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$

Για $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$

Για $x = 2$, $u = \ln 2$

Άρα $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$

Άρα $\int_1^2 \frac{e^{f(x)}}{x}dx = 1 - \frac{\ln^2 2}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) + x = f(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) - x = f'(x) - x' = (f(x) - x)'$

Άρα $f(x) - x = ce^x$ **, f(0) = 1 = ce⁰ = c ⇔ c = 1.**

Άρα $f(x) - x = e^x \Leftrightarrow f(x) = x + e^x$.

Γ2. Επειδή **D_f = R,** η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty.$$

Άρα η συνάρτηση δεν έχει ασύμπτωτη στο **+∞.**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Άρα η ευθεία **y = x** είναι πλάγια ασύμπτωτη της **f** στο **– ∞**

Γ3. Θα βρω την εφαπτομένη της **C_f** που περνάει από το **(0,0).**

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_o)$ **,** και αφού περνάει από το **(0,0)** έχουμε

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_o) \Leftrightarrow -f(x_0) = f'(x_0)(-x_o) \Leftrightarrow$$

$$x_0 + e^{x_0} = (1 + e^{x_0})x_0 \Leftrightarrow x_0 + e^{x_0} = x_o + e^{x_0}x_0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x_0} = e^{x_0}x_0 \Leftrightarrow e^{x_0} - e^{x_0}x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}(1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η εφαπτομένη είναι η $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$

$$y - 1 - e = (1 + e)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 + e)x + 1 + e - 1 - e$$

Άρα εφαπτομένη είναι η $y = (1 + e)x$.

$y(t) = x(t) + e^{x(t)}$ **. Άρα** $y'^{(t)} = x'^{(t)} + e^{x(t)}x'(t) = x'(t)(1 + e^{x(t)})$ **.**

Άρα $y'(t) = 2(1 + e^{x(t)})$**.**

Όμως όταν η εφαπτομένη της **C_f** περνάει από το **(0,0)** , τότε **$x(t_o)$=1.**

Συνεπώς $\boldsymbol{y'(t_0) = 2(1+e) = 2+2e}$ **μον/sec.**

Γ4. Θεωρώ τη συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = xe^x - e^x - e}$

$\boldsymbol{g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x}$.

g(0) = – 1 – e

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	−		+
g(x)	↘		↗

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - e^x - e$ **=(-∞).0– 0 – e** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$

= $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x$**= 0,** με **–** $\boldsymbol{e^x} < 0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - e^x - e$ **= 0– 0 – e = – e.**

Άρα στο διάστημα **(– ∞,0)** η συνάρτηση είναι πάντοτε αρνητική, επομένως δεν έχει ρίζα.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x - e$ **=** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x-1) - e$ **= +∞.**

Και επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο **(0,+∞),** το σύνολο των τιμών της συνάρτησης στο διάστημα αυτό είναι $\boldsymbol{f}((\mathbf{0},+\infty))$**=(– e , +∞).**

Και επειδή στο σύνολο αυτό περιέχεται το μηδέν, η συνάρτηση έχει ρίζα η οποία είναι και μοναδική λόγω της μονοτονίας.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. f(x) ≥ 2 ⇔ f(x) ≥ f(1) για κάθε $\boldsymbol{x \in R}$, άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο **1.**

Επειδή η **f** είναι παραγωγίσιμη στο **R** άρα και στο **1** **,** σύμφωνα με το θεώρημα Fermat **f’(1) = 0.**

Όμως **f** κυρτή , συνεπώς η **f’** είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή **x < 1 ⇔ f’(x) < f’(1) = 0**

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	−		+
f(x)	↘		↗

Άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο **(– ∞,1]** και γνησίως αύξουσα στο **[1,+∞)**

Δ2. $\boldsymbol{f(e^x(x+1)^{x-1}) = 2 = f(1)}$ ⇔ $\boldsymbol{e^x(x+1)^{x-1} = 1}$ **(** επειδή **f 1 – 1)**

⇔ $\boldsymbol{ln(\ e^x(x+1)^{x-1}) = ln\ 1}$ ⇔ $\boldsymbol{lne^x + ln(x+1)^{x-1} = 0}$

⇔ **x + (x – 1)ln(x+1) = 0.**

Θεωρώ τη συνάρτηση **g(x) = x + (x – 1)ln(x+1)** που έχει προφανή ρίζα το **0.**

$\boldsymbol{g'(x) = 1 + \ln(x+1) + \frac{x+1}{x-1}}$ με $\boldsymbol{g'(0) = 1 + ln1 + \frac{1}{-1} = 0}$

$\boldsymbol{g''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} > 0}$ για **x > – 1**, άρα **g'(x)** γνησίως αύξουσα στο **(– 1 , +∞).**

Συνεπώς για **x < 0 ⇔ g'(x) < g'(0) = 0** , άρα η **g** είναι γνησίως φθίνουσα.

Ομοίως για **x > 0 ⇔ g'(x) > g'(0) = 0** , άρα η **g** είναι γνησίως αύξουσα.

Συνεπώς για **x = 0** η **g** παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το **g(0) = 0.**

Άρα η τιμή **0** είναι η μοναδική τιμή που μηδενίζεται η **g,** συνεπώς είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης **g(x) = 0** , άρα είναι και η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης.

Δ3. Θεωρώ τη συνάρτηση **g(x) = e^x – x –1.**

g'(x) = e^x –1, g(x) > 0 ⇔ e^x –1 > 0 ⇔ e^x > 1 ⇔ e^x > e^0 ⇔ x > 0 (επειδή **e^x↑)**

	-∞	0	+∞
g'(x)	−	+	
g(x)	↘	↗	

Άρα η **g** παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο **O** με τιμή **g(0) = e^0 – 0 – 1 = 0.**

Άρα **g(x) ≥ g(0) ⇔ e^x – x –1 ≥ 0 ⇔ e^x ≥ x +1**

Όμως $\boldsymbol{e^{x^2} \geq e^0 = 1}$ και **x^2 + 1 ≥ 1.** Άρα $\boldsymbol{e^{x^2}}$, $\boldsymbol{x^2+1} \in [\boldsymbol{1}, +\infty)$, όπου η **f** είναι γνησίως αύξουσα **(** ερώτημα **Δ1).**

Άρα $\boldsymbol{e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq x^2+1 \Leftrightarrow f\left(e^{x^2}\right) \geq f(x^2+1)}$ **(**επειδή **f** γνησίως αύξουσα**)**

Δ4. **4 +** $\boldsymbol{\int_0^1 x^2 f''(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx}$.

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^2 f''(x)dx = \int_0^1 x^2\,(f'(x)')dx = [x^2 f'(x)]_0^1 - \int_0^1 2x\,f'^{(x)}dx =}$$

$$\boldsymbol{f'(1) - 2\int_0^1 x\,f'^{(x)}dx = 0 - 2[xf(x)]_0^1 + 2\int_0^1 f(x)\,dx = -2f(1) + 2\int_0^1 f(x)\,dx =}$$

$$\boldsymbol{-2.2 + 2\int_0^1 f(x)\,dx = -4 + 2\int_0^1 f(x)\,dx\ .}$$

Άρα **4 +** $\boldsymbol{\int_0^1 x^2 f''(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx}$.