

## **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

#### **Άσκηση 1<sup>η</sup>** (ΓΙ V ALG 4 17834)

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με  $\frac{11}{3}$ . Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (μονάδες 12)

#### **Άσκηση 2<sup>η</sup>** (ΓΙ V ALG 4 17835)

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις  $x + (\lambda + 2)y = 3$  και  $(\lambda - 2)x + 5y = 3$  αντίστοιχα και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ , να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών (μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των δύο ευθειών (μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση:  $x + 2y = 3$ . (μονάδες 5)

#### **Άσκηση 3<sup>η</sup>** (ΓΙ V ALG 4 17839)

Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$ , με παράμετρο το  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(x_0, y_0)$ , τότε  $x_0 = y_0$ . (μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σύστημα:

    ι) Έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε την μορφή τους. (μονάδες 6)

ii) Δεν έχει λύση. (μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για  $a=3$ ,  $a=2$ ,  $a=-2$ . (μονάδες 5)

**Άσκηση 4<sup>η</sup> (GI V ALG 4 17840)**

Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ , με παράμετρο το  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (μονάδες 10)

β) Αν  $\lambda=-1$  και  $(x_0, y_0)$  είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία  $\theta \in [0, 2\pi)$  τέτοια ώστε  $x_0 = \sin\theta$  και  $y_0 = \eta\mu\theta$ . (μονάδες 7)

γ) Αν  $\lambda=1$  και  $(x_1, y_1)$  είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$  τέτοια ώστε  $x_1 = \sin\omega$  και  $y_1 = \eta\mu\omega$ . (μονάδες 8)

**Άσκηση 5<sup>η</sup> (GI V ALG 4 17850)**

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιού μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1 και 2 που έδωσε ο Κώστας. (μονάδες 10)

β. Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (μονάδες 15)

**Άσκηση 6<sup>η</sup> (GI V ALG 4 20335)**

Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης.

Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 2,4 χιλιόμετρα την ώρα. Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

- α. Αν  $t$  ο χρόνος που περπάτησαν μέχρι να συναντηθούν και  $s$  η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το  $t$  και το  $s$ , το οποίο να περιγράφει την παραπάνω κατάσταση. (μονάδες 10)
- β. Σε πόση απόσταση από τη Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δύο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 15)

### **Άσκηση 7η (GI V ALG 4 20336)**

Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 4y = 1 - \lambda \\ x + 6y = \lambda + 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ . (μονάδες 7)
- β. Να βρείτε τα  $x$  και  $y$  συναρτήσει του  $\lambda$ . (μονάδες 8)
- γ. Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$ , για την οποία οι ευθείες  $2x - 4y = 1 - \lambda$ ,  $x + 6y = \lambda + 2$  και  $16x + 16y = 19$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. (μονάδες 10)

### **Άσκηση 8<sup>η</sup> (GI V ALG 4 20337)**

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24 cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

- α. Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (μονάδες 10)
- β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου (μονάδες 15)

### **Άσκηση 9<sup>η</sup> (GI V ALG 4 20920)**

- α. Να λύσετε το σύστημα (Σ1):  $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ . (μονάδες 10)

- β. Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ1), λύσεις και του συστήματος (Σ2):  $\left\{ \begin{array}{l} |xy|=6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array} \right\}$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (μονάδες 7)
- γ. Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ2), λύσεις του συστήματος (Σ1); Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 8)

**Άσκηση 10η (GI V ALG 4 20925)**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \lambda x + y = 1$  και  $\varepsilon_2 : x + \lambda y = \lambda^2$

- α. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του  $\lambda$ . (μονάδες 13)
- β. Για ποια τιμή του  $\lambda$  οι δύο ευθείες είναι παράλληλες; (μονάδες 6)
- γ. Αν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$  και  $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$  είναι παράλληλες. (μονάδες 6)