

ΘΕΜΑ 4°

ΑΣΚΗΣΗ 1η (GI V ALG 4 17838)

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -4/5$ (M 10)

β) Αν για την γωνία ω επιπλέον ισχύει $\pi/2 < \omega < \pi$, τότε:

- να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = 7/25$ και $\eta\mu 2\omega = -24/25$ (M 8)
- να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13[\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\varphi 2\omega \cdot \sigma\varphi 2\omega + 25[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]} \quad (\text{M } 7)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η (GI V ALG 4 17844)

α) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (M 12)

β) Με την βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω που βρίσκονται στο $[0, 2\pi]$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο. (M 13)

ΑΣΚΗΣΗ 3η (GI V ALG 4 17846)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

α) Να μεταφέρεται στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για κάθε x που βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (M 8)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$ (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (M 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g (M 13).

ΑΣΚΗΣΗ 4η (GI V ALG 4 17852)

Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτηθεί του χρόνου t σε sec δίνεται από τη σχέση $h(t)=a \sin(\omega t)+\beta$, με a, β πραγματικούς αριθμούς και $\omega > 0$.

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο είναι 100cm. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο – ηρεμία – μέγιστο- ηρεμία- ελάχιστο) είναι 6sec.

α) να αποδείξετε ότι $\omega = \pi/3$. (M 5)

β) Να προσδιορίσετε τι τιμές των a και β αιτιολογώντας την απάντησή σας. (M 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14cm μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (M 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για όλα τα t στο διάστημα $[0, 12]$. (M6)

ΑΣΚΗΣΗ 5η (GI V ALG 4 17855)

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος σε cm, δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=12\eta\mu(\pi t/4)+13$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (M 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t=5$ και $t=8$. (M 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=8$, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή; (M 10)

ΑΣΚΗΣΗ 6η (GI V ALG 4 20331)

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) κατά την διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από την συνάρτηση $f(t)=-8\sin(\pi t/12)+4$, με το t να ανήκει στο διάστημα $[0, 24]$ (t ο χρόνος σε ώρες)

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά την διάρκεια του εικοσιτετραώρου. (M 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0°C (Μ 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για όλα τα t που βρίσκονται στο διάστημα $[0, 24]$. (Μ 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια τη γραφικής παράστασης της f , πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0°C (Μ 5)

ΑΣΚΗΣΗ 7η (GI V ALG 4 20338)

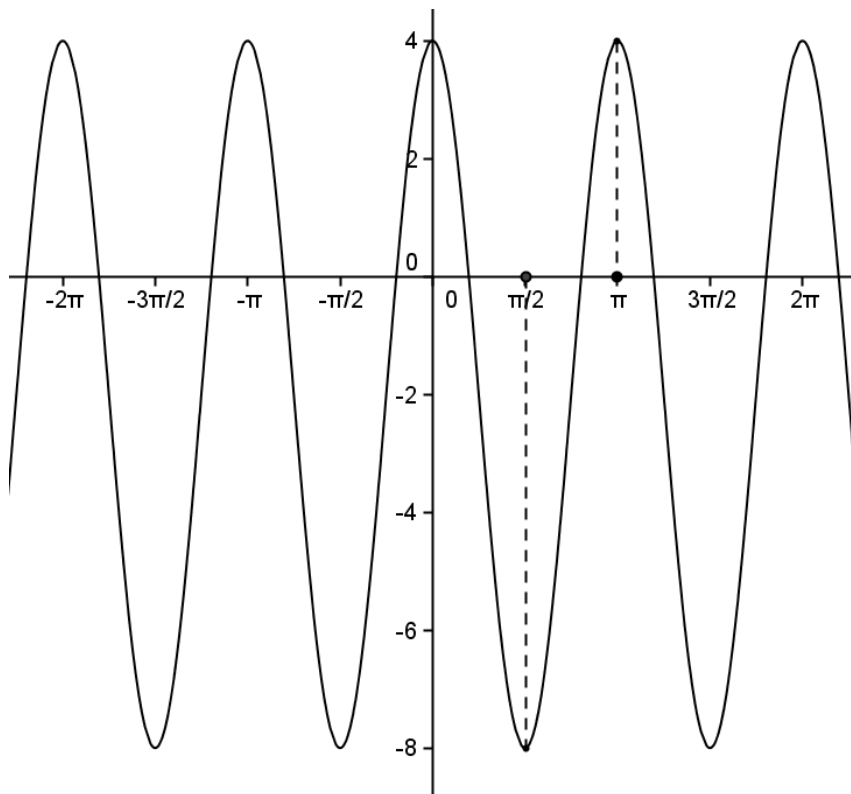
Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , που είναι της μορφής $f(x)=a+\beta\sin 2x$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μ 4)

β) Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μ 4)

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $a=-2$ και $\beta=6$. (Μ 8)

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (Μ 9)



ΑΣΚΗΣΗ 8η (GI V ALG 4 20339)

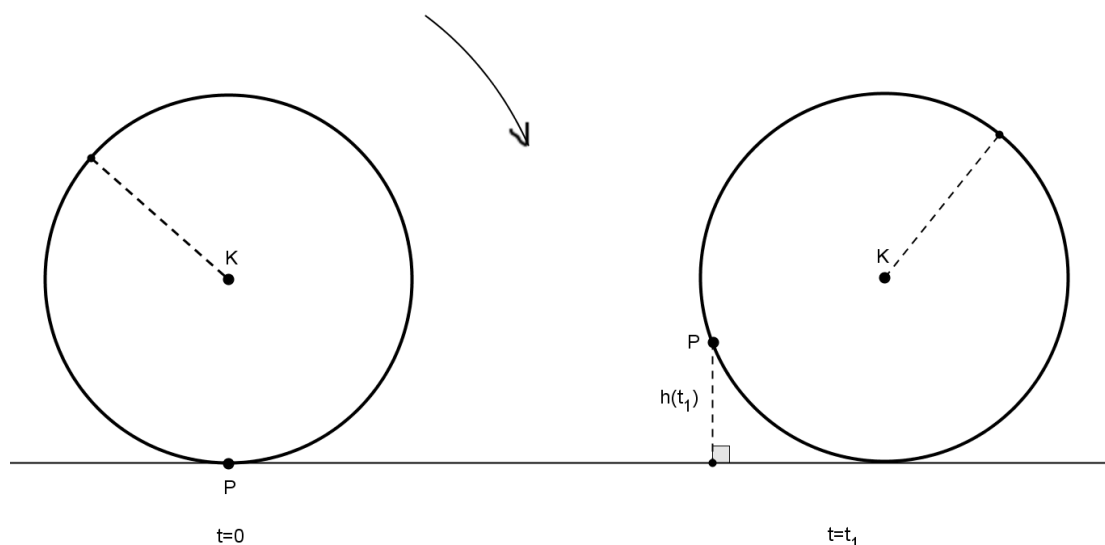
Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μία επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h σε m του σημείου P από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση: $h(t) = -0,2\sin(\omega t) + 0,2$, με ω θετική πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4sec.

α) να αποδείξετε ότι $\omega = \pi/2$. (M 5)

β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του P από την επιφάνεια τις στιγμές: $t_1=1\text{sec}$, $t_2=2\text{sec}$ και $t_3=7\text{sec}$. (M6)

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h . (M 5)

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας. (M 9)



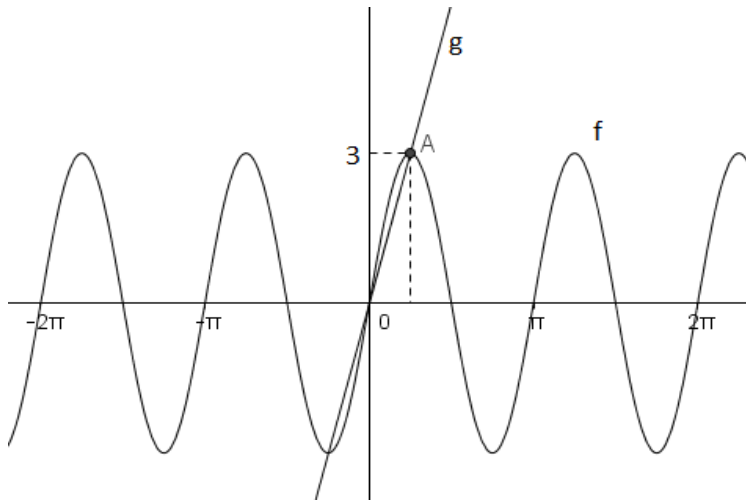
ΑΣΚΗΣΗ 9η (GI V ALG 4 20921)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = ax + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x) = r\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$ και $r > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

α) Να αποδείξετε ότι $r=3$ και $\omega=2$ (M 5)

β) Να βρείτε τα a και β . (M 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-12x/\pi=0$ στο διάστημα $[0,\pi]$ (Μ 10)



ΑΣΚΗΣΗ 10η (ΓΙ V ALG 4 20922)

Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=-2\eta\mu(\pi t/2)+2$ με t σημείο του διαστήματος $[0, 4]$.

α) Να βρείτε την περίοδο της f . (Μ 5)

β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει αυτές τις τιμές. (Μ 12)

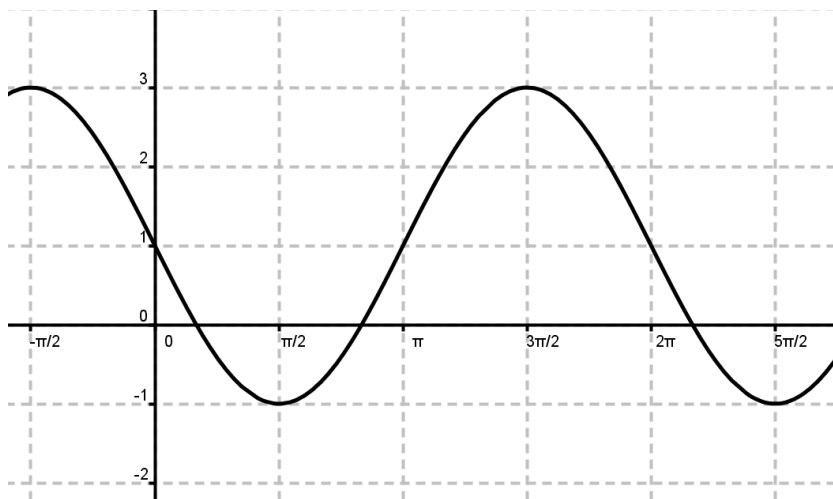
γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f . (Μ 8)

ΑΣΚΗΣΗ 11η (ΓΙ V ALG 4 20923)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu(3x)+1$, με x πραγματικό αριθμό.

α) Να βρείτε την περίοδο T και τη μέγιστη τιμή της f . (Μ 5)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=a\eta\mu(\beta x)+\gamma$ με x πραγματικό αριθμό.



1. Να προσδιορίσετε τα α , β , γ . (M 12)
2. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$ (M 8)

ΑΣΚΗΣΗ 12η (GI V ALG 4 22690)

Δίνεται η εξίσωση $1 - \eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

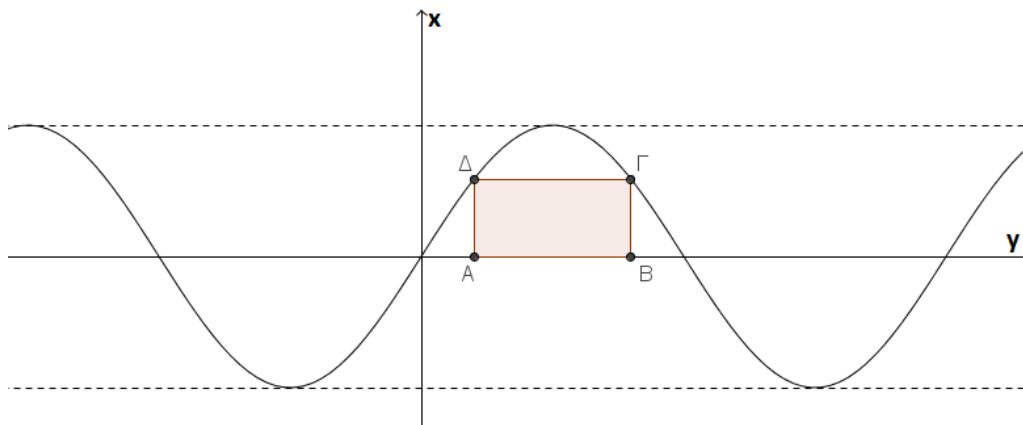
α) Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (A), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 \geq 0$. (M 5)

β) Θεωρούμε την εξίσωση $(1 - \eta\mu x)^2 = 3\sigma\upsilon\nu^2 x$ (B) η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (A). Να λύσετε την (B). (M 12)

γ) Να λύσετε την (A). (M 8)

ΑΣΚΗΣΗ 13η (GI V ALG 4 22691)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\eta\mu(\pi x/4)$.



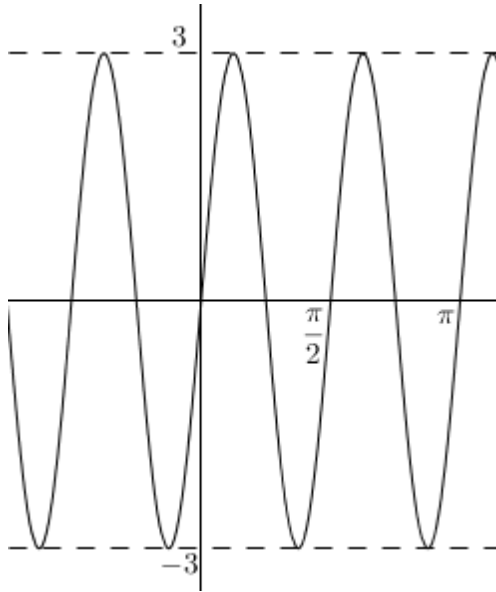
α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (M 5)

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $A(2/3, 0)$. Να βρείτε:

1. τις συντεταγμένες του σημείου Δ (M 10)
2. τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ . (M 10)

ΑΣΚΗΣΗ 14η (GI V ALG 4 22693)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους α , ω θετικούς αριθμούς.



Να βρείτε:

α) Την περίοδο της συνάρτησης f (Μ 9)

β) τους αριθμούς a και ω (Μ 8)

γ) τους πραγματικούς αριθμούς κ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, \pi/2)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή. (Μ 8)