ΑΣΚΗΣΗ (2_2814)

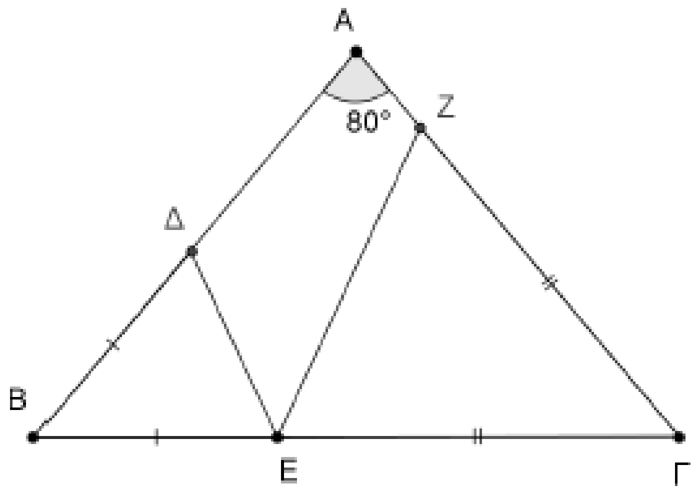
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (ΑΒ=ΑΓ) είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $\overset{\triangle}{B\Delta E}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma Z E}$

(Μονάδες 15)

β Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2816)

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) φέρνουμε τις τέμνουσες του ΣΑΒ και ΣΓΔ ώστε ΣΒ=ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.

α Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{KB\Sigma}$ και $\overset{\triangle}{K\Delta\Sigma}$ είναι ίσα.

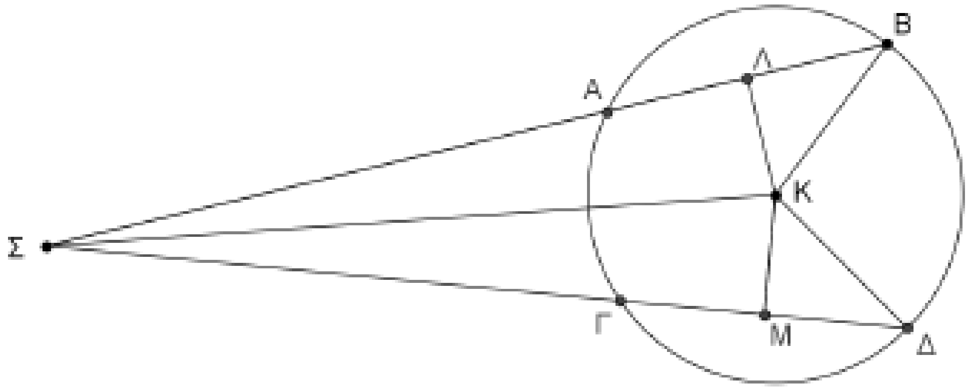
(Μονάδες 10)

ii) ΚΛ=ΚΜ.

(Μονάδες 10)

β Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2819)

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) , Αx η εφαπτομένη σε σημείο Α του κύκλου και επιπλέον

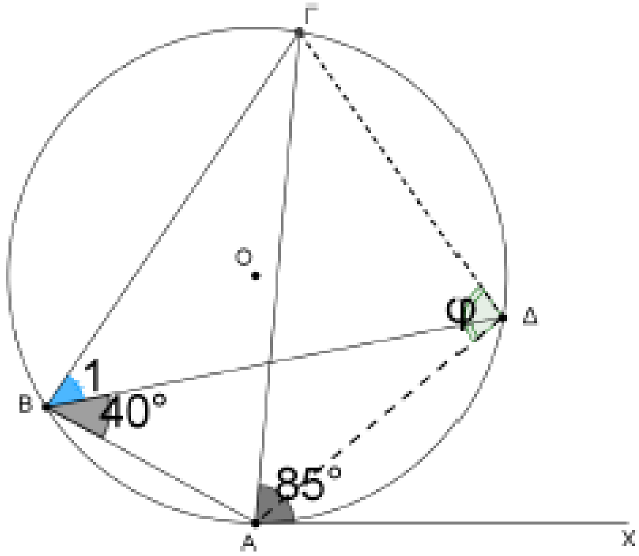
$\Gamma\hat{A}x = 85^\circ$ και $\Delta\hat{B}A = 40^\circ$.

α Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ$.

(Μονάδες 10)

β Να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A$.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2824)

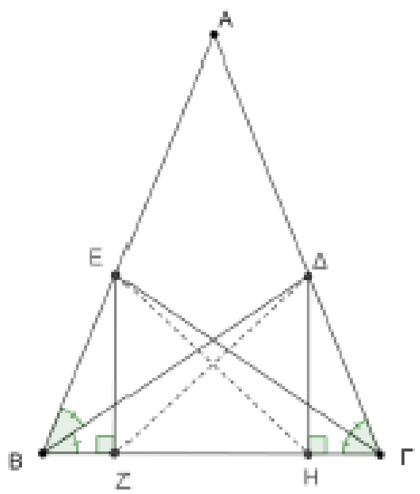
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ισχύει ότι $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}E$.

(Μονάδες 13)

β) ΕΗ=ΔΖ.

(Μονάδες 12)

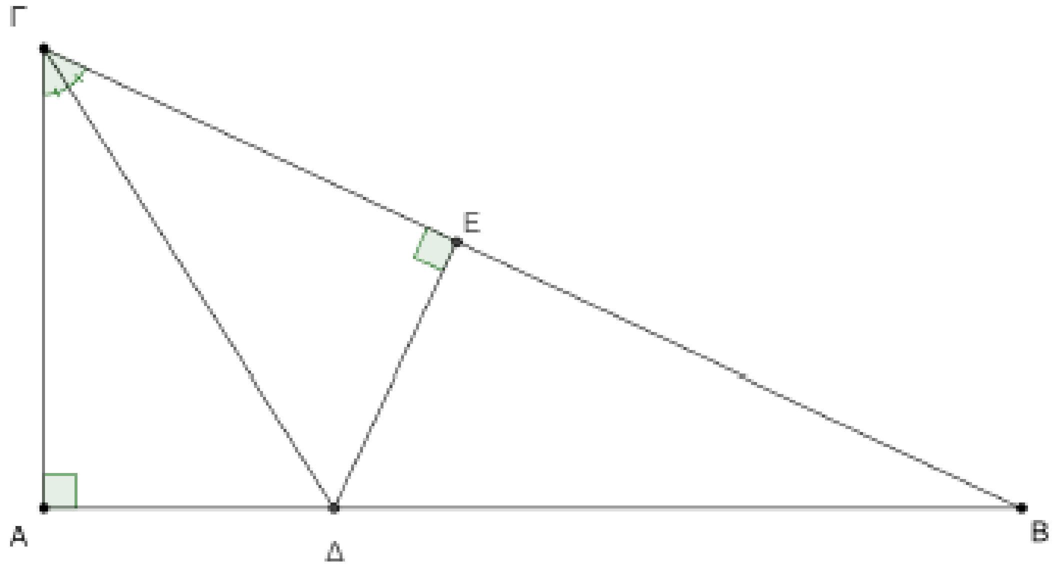


ΑΣΚΗΣΗ (2_2837)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ($\hat{A}=90°$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 13)

β) ΑΔ<ΔΒ (Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2839)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ($\hat{A}=90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

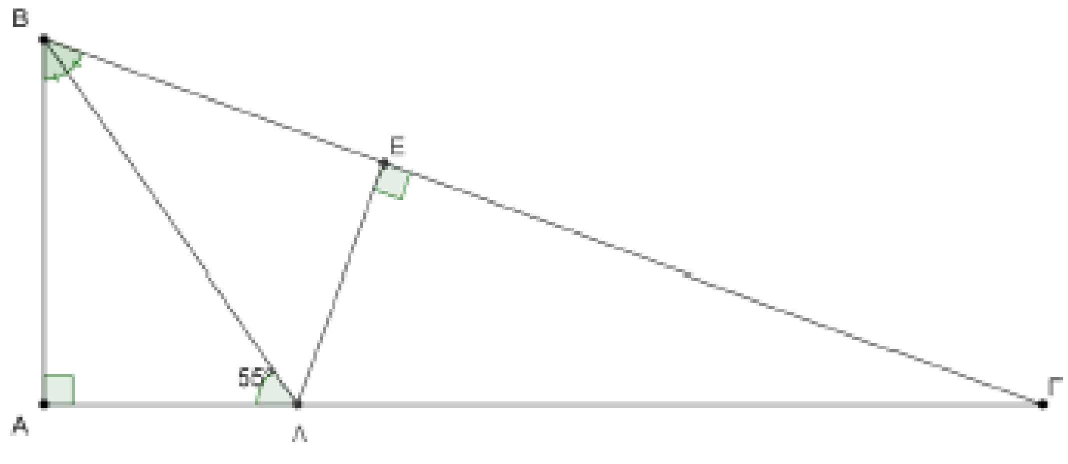
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΑΒ

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\hat{\Delta}E$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2845)

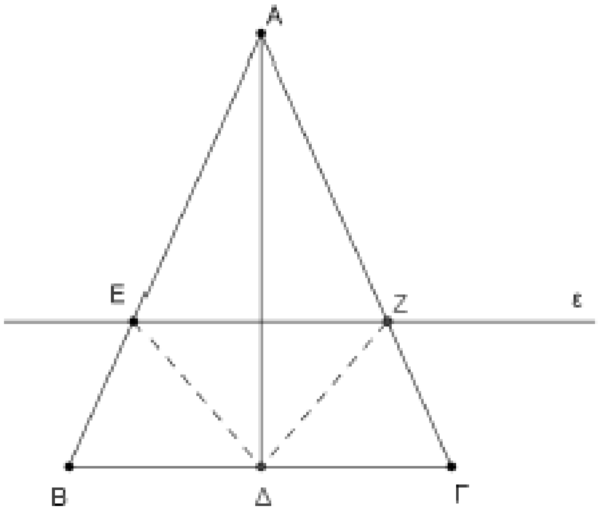
Σε ισοσκελές τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{E}Z$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{Z}\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2846)

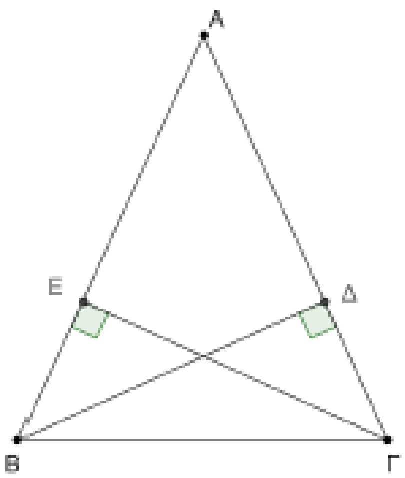
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ και $\Gamma\overset{\triangle}{E}B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) ΑΔ=ΑΕ .

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2847)

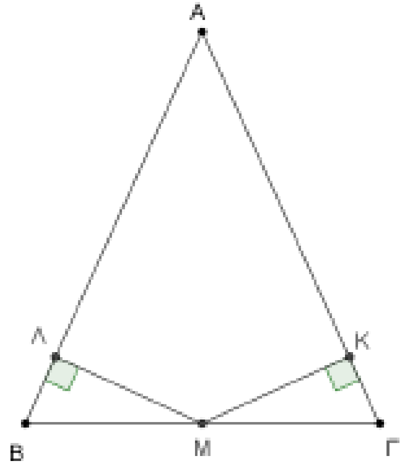
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ.
Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου

$A\hat{B}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΚ=ΜΛ.

(Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{M}\Lambda$.

(Μονάδες 12)



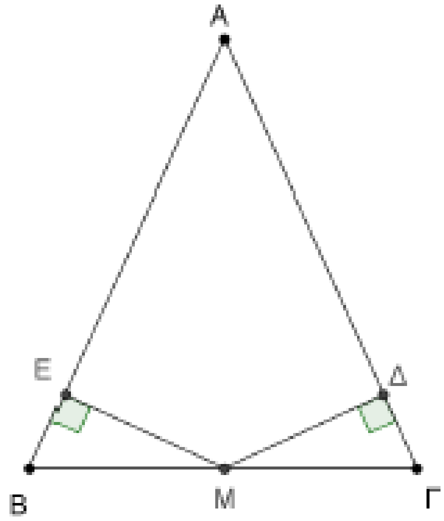
ΑΣΚΗΣΗ (2_2848)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
α) ΜΔ=ΜΕ.

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $A\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2853)

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $X\hat{O}\Psi$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας στα σημεία Α,Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Μονάδες 25

ΑΣΚΗΣΗ (2_2854)

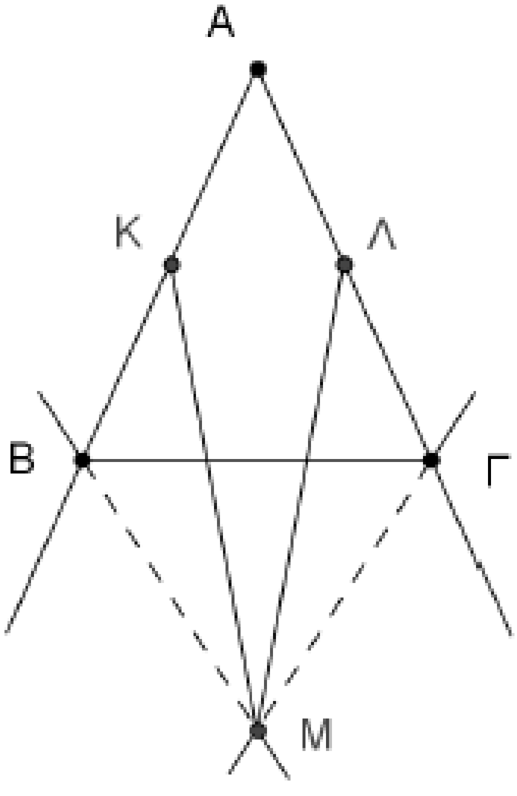
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\hat{M}\Gamma$ είναι ισοσκελές με ΜΒ=ΜΓ.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΜΚ=ΜΛ.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2855)

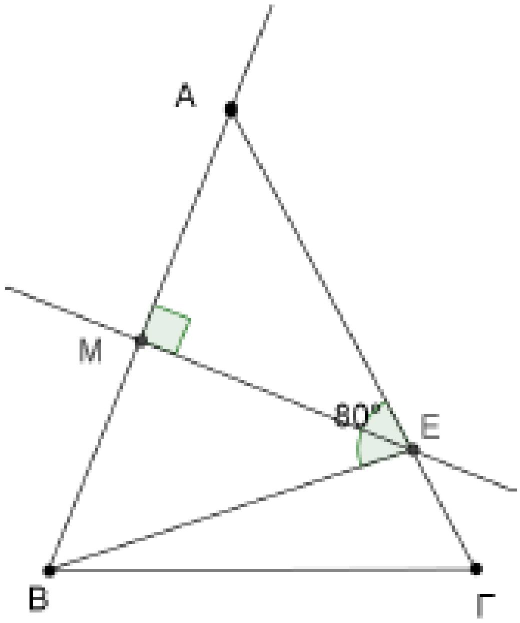
Δίνεται τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{B}$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ.

(Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι ίση με 80^o, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2860)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Ο γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες.

Μονάδες 10

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (2_3417)

Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB = A\Gamma)$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ $(A'B' = A'\Gamma')$.

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_3420)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3421)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABM}$ και $\overset{\triangle}{M\Gamma\Delta}$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3423)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α).

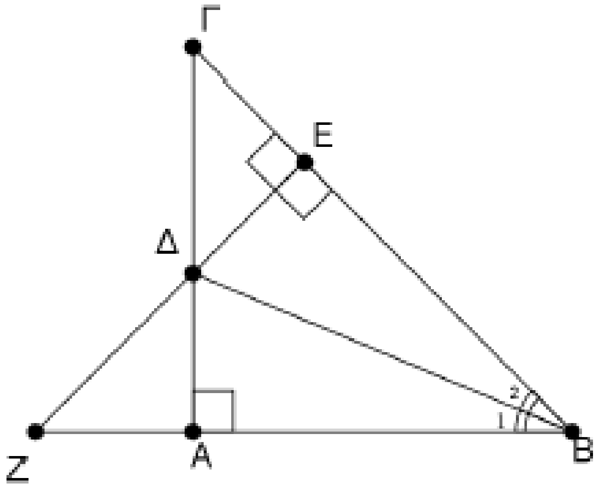
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΒΕ

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_3425)

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε ΔΕ = ΑΔ.

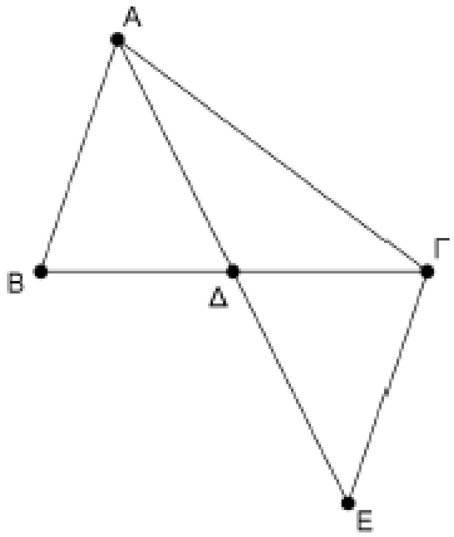
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΓΕ

Μονάδες 12

β) $ΑΔ < \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3426)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος της γωνίας του Γ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma$.

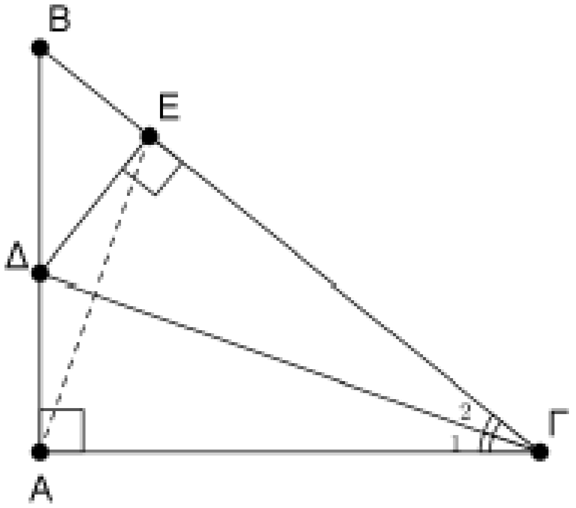
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_4974)

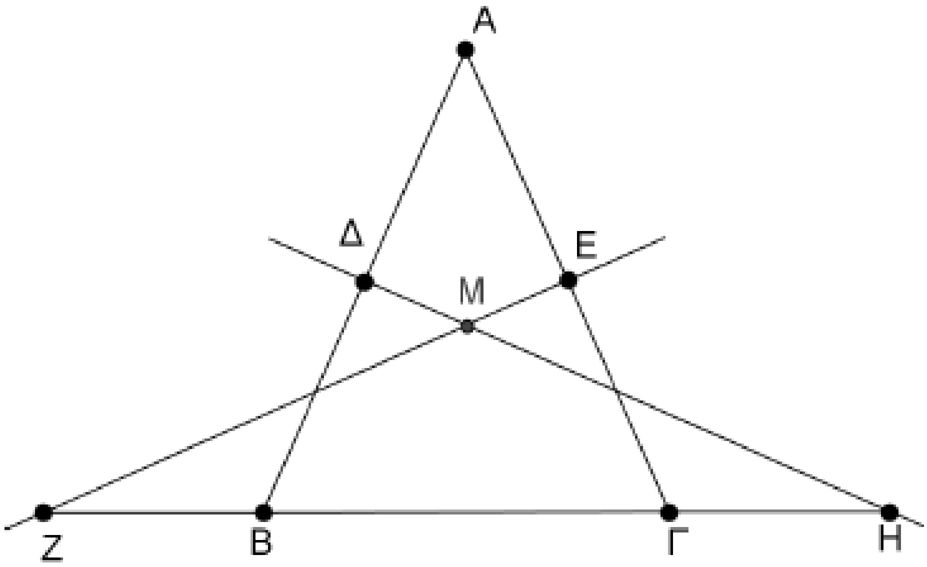
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_5017)

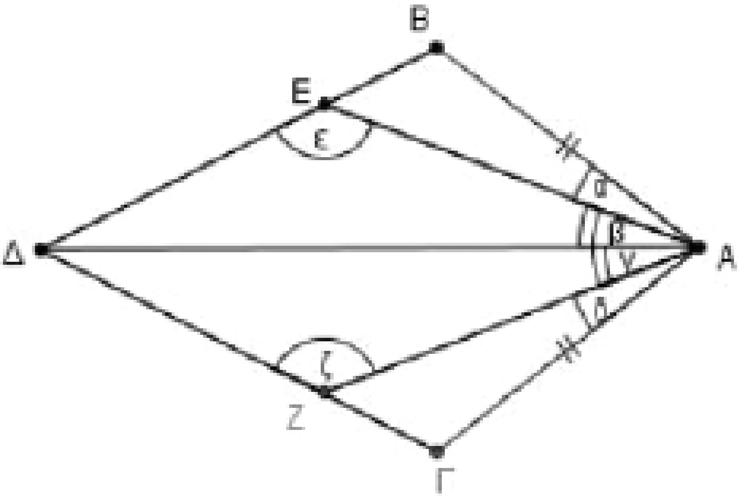
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι **α = δ** , **β = γ** και ΑΒ = ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

Μονάδες 12

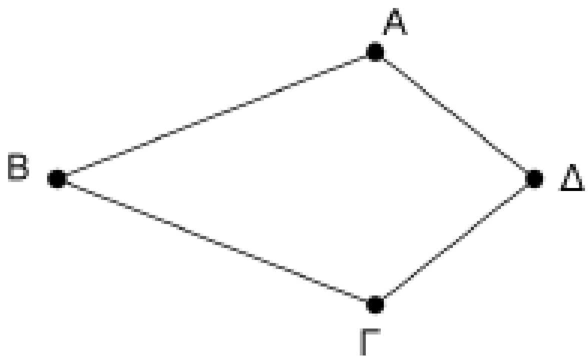
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5029)

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξτε ότι:

α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5035)

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ του σχήματος ισχύουν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

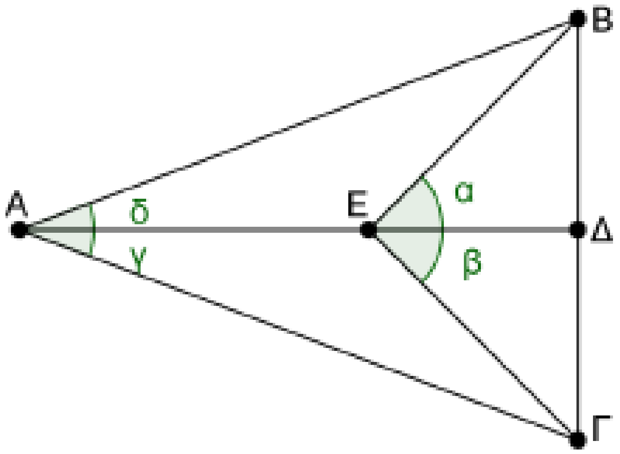
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5048)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

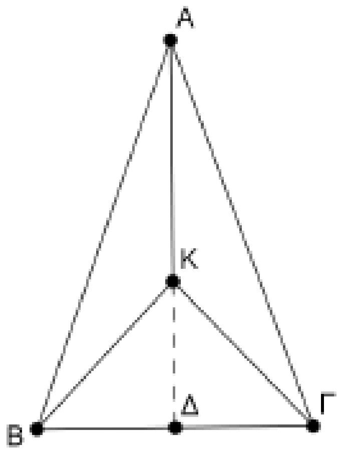
(Μονάδες 12)

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου ΒΚΓ.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5053)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ =ΓΕ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

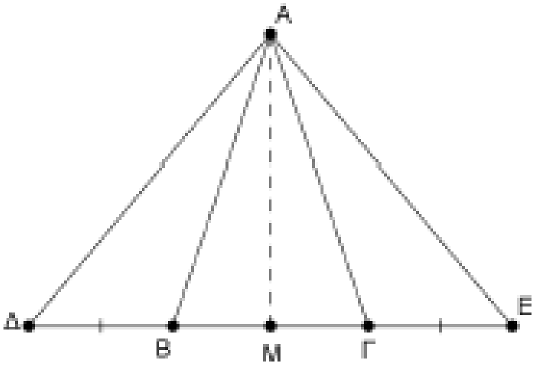
(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5075)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\hat{BM\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5127)

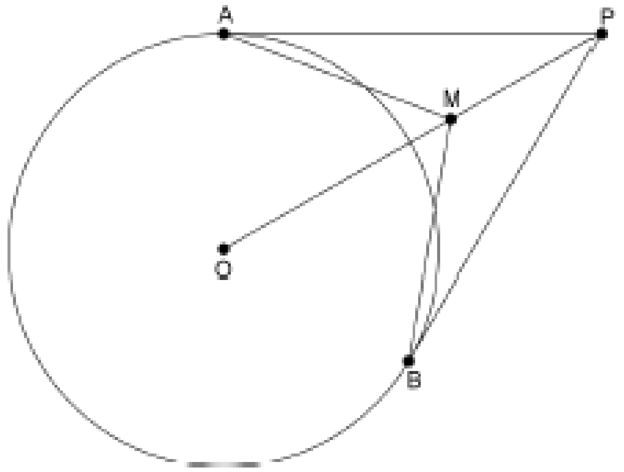
Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) οι γωνίες $M\hat{A}O$ και $M\hat{B}O$ είναι ίσες.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5136)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ , ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ , να αποδείξετε ότι :

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα .

Μονάδες 5

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα .

Μονάδες 10

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5139)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ (ΚΑ = ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας Κ . Στην

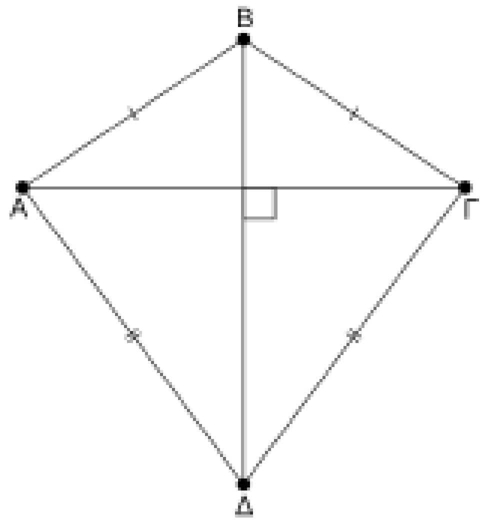
προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ , έτσι ώστε ΑΛ = ΒΜ . Να αποδείξετε ότι :
α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές

Μονάδες 12

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5144)
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ . Οι διαγώνιοι ΑΓ , ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα . Να αποδείξετε ότι :



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 12

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ .

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5157)
Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ . Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα , τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ . Να αποδείξετε ότι :
α) ΜΑ = ΜΒ .

Μονάδες 15

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

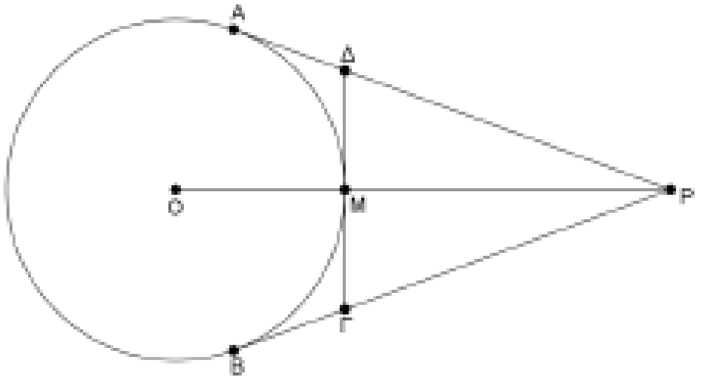
Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5567)
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο , και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ . Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα .
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές .

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40^o να υπολογίσετε την γωνία ΑΟΒ .

Μονάδες 12

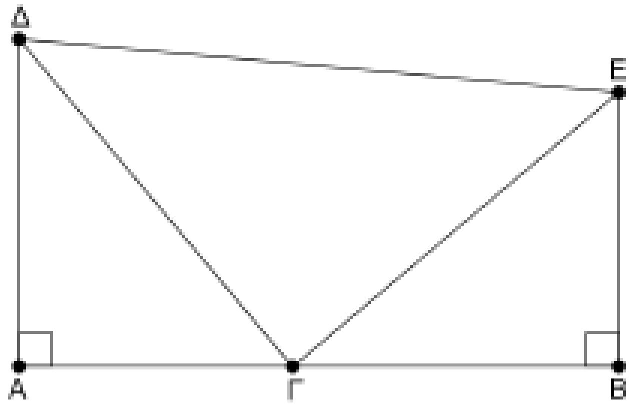


ΑΣΚΗΣΗ (2_5573)
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες Α , Β είναι ορθές και επιπλέον $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΓ = ΒΕ$.
Να αποδείξετε ότι :
α) Να τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα .

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία $Ε\hat{Γ}Β = 40^o$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5580)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στη ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ

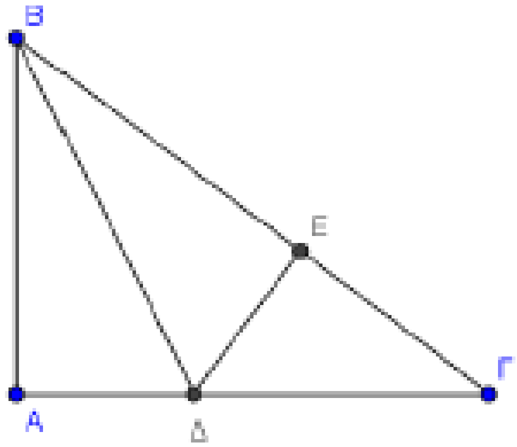
Μονάδες 8

β) ΑΔ<ΔΓ

Μονάδες 9

γ) ΑΓ<ΑΒ

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5582)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΓΔ.

Μονάδες 6

β) ΒΔ = ΓΕ.

Μονάδες 10

γ) ΔΒΓ = ΕΓΒ.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (2_5591)

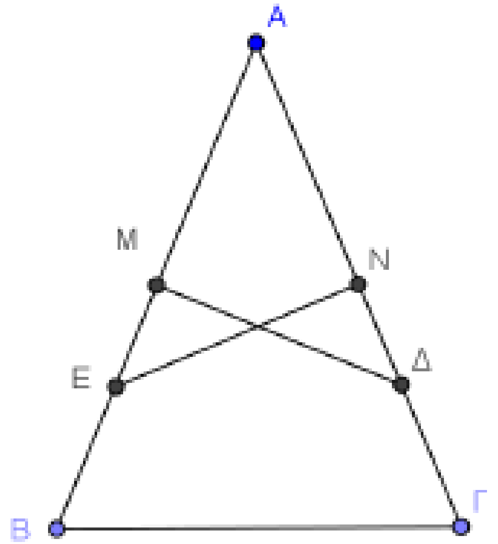
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $ΜΔ$, $ΝΕ$ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του $ΑΒ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5595)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της $ΒΓ$ (προς το $Γ$) θεωρούμε σημείο $Δ$ και στην προέκταση της $ΓΒ$ (προς το $Β$) θεωρούμε σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΗ$ κάθετη στην ευθεία $ΑΓ$ και από το $Ε$ φέρουμε $ΕΖ$ κάθετη στην ευθεία $ΑΒ$.

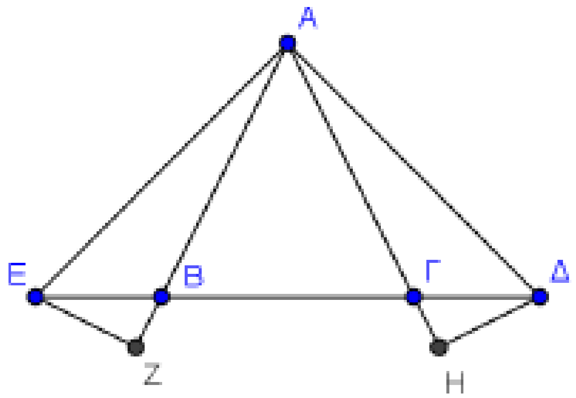
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΑΕ$.

Μονάδες 12

β) $ΕΖ = ΔΗ$.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5597)

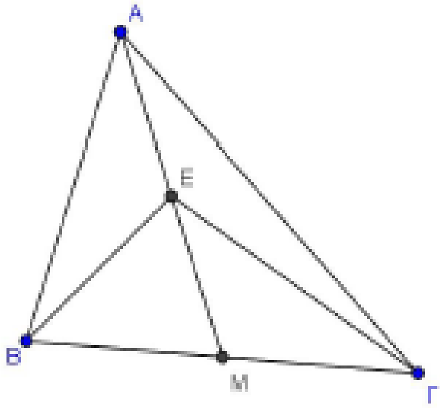
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{AEB} = \widehat{EM\Gamma}$.

Μονάδες 12

β) ΑΒ = ΕΓ.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5603)

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος

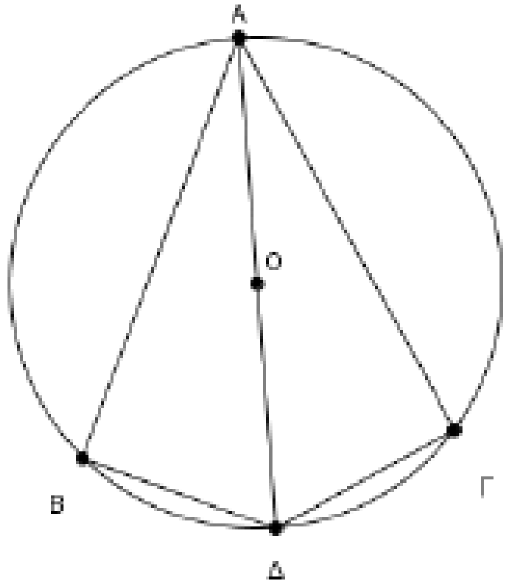
της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα.

Μονάδες 10

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5607)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ.

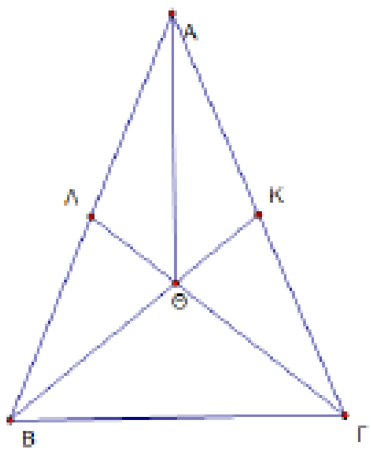
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5613)

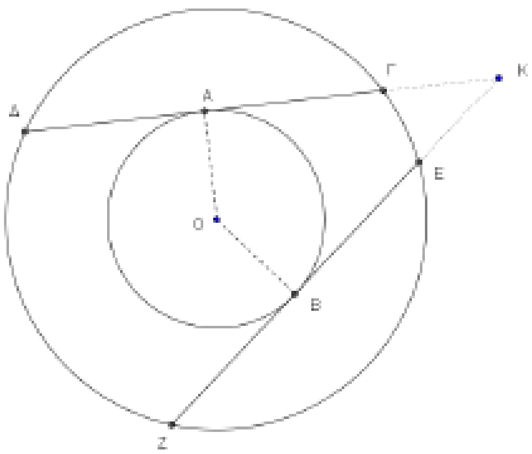
Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ < R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο, R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΖΕ.

Μονάδες 12

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5619)

Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ, από τυχαίο σημείο Β της Αy φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αx στο Γ.

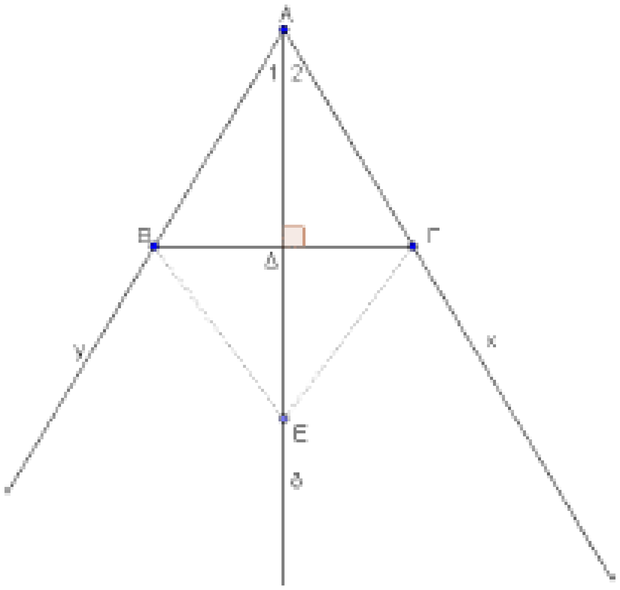
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5628)

Δίνονται τα τμήματα ΑΓ = ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ = ΟΒ, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΗ = ΟΖ.

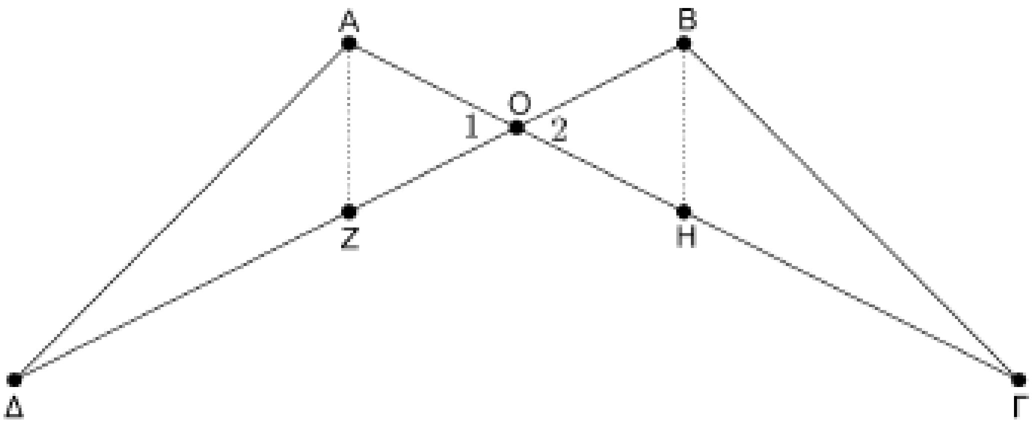
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΑΔΟ και ΒΓΟ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) ΑΖ = ΒΗ

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5630)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.

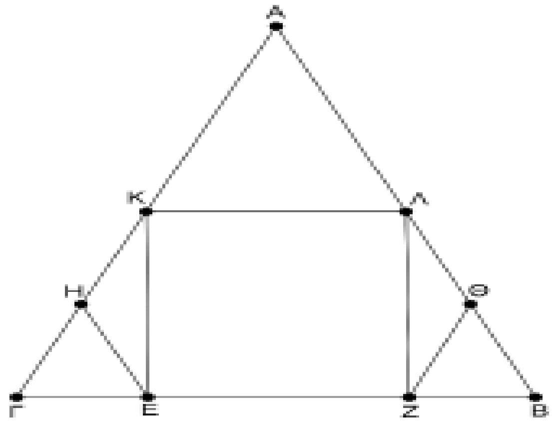
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.

Μονάδες 15

β) ΕΗ = ΖΘ, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_5633)

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ = ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν το κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.

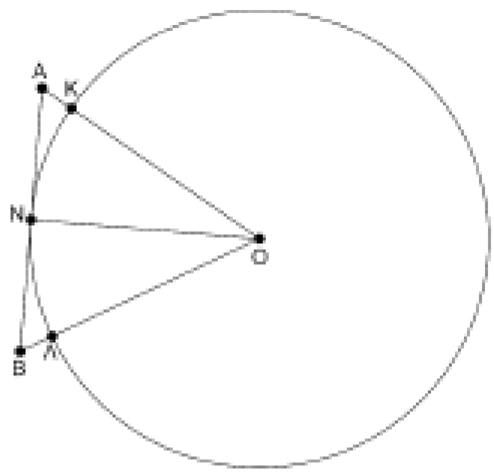
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5634)

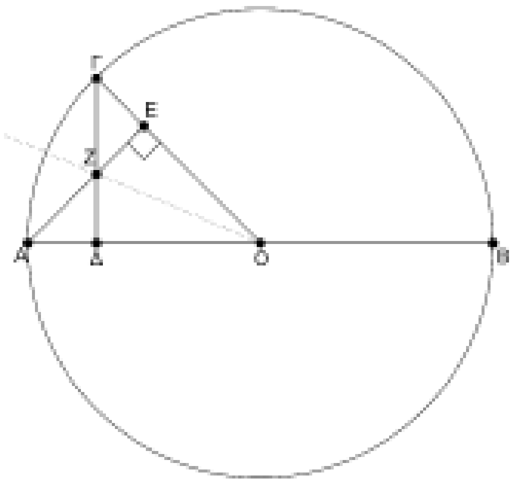
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $\hat{ΑΟΓ}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5647)

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

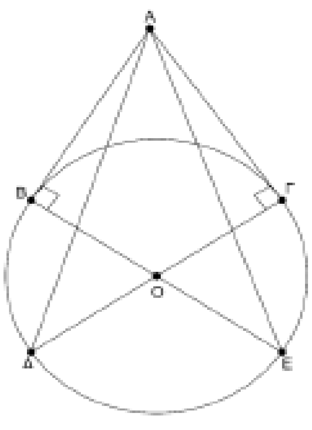
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5733)

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

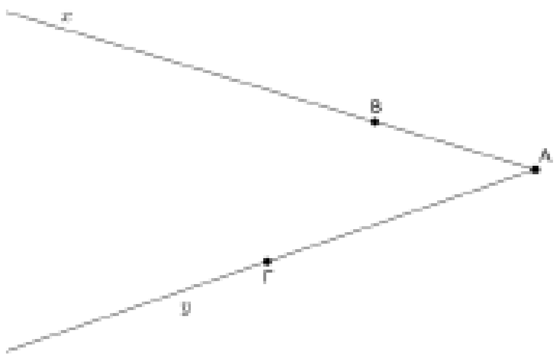
Μονάδες 9

β) Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 9

γ) Ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (2_6592)

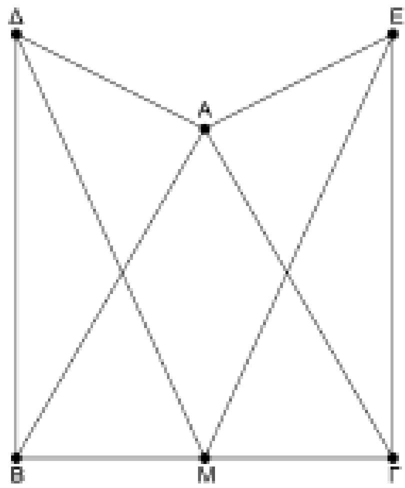
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

Μονάδες12

β) ΑΔ = ΑΕ.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_7453)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A}=90^0$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι :

α) ΒΕ = ΑΒ,

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

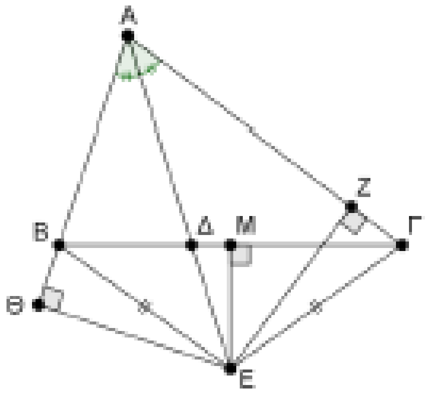
ΑΣΚΗΣΗ (4_2787)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 5)**

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 8)**

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^0$ **(Μονάδες 12)**



ΑΣΚΗΣΗ (4_2788)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^0\right)$ με $\hat{B}=50^0$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ = ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 6)**

ii) $\Gamma\hat{A}E=10^0$ **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. **(Μονάδες 9)**

ΑΣΚΗΣΗ (4_2796)

Δίνεται κύκλος με κέντρο O, και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου ότι και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε BE = AΔ.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα AΔΓ και BEΓ είναι ίσα.

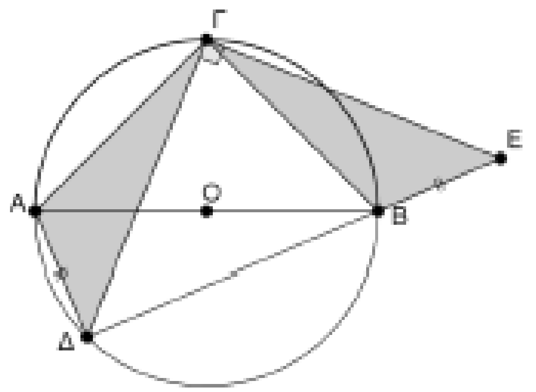
(Μονάδες 8)

ii) Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (4_3694)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ (AB < AΓ) και η διχοτόμος AΔ. Φέρουμε από το B κάθετη στην AΔ που τέμνει την AΔ στο E και την πλευρά AΓ στο H. Αν M είναι το μέσο της πλευράς BΓ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

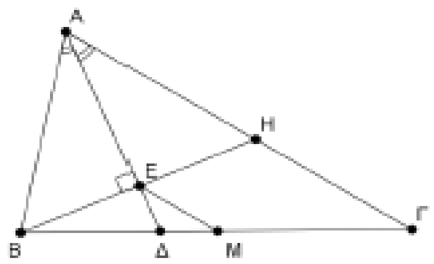
Μονάδες 9

β) EM // HΓ

Μονάδες 8

γ) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3695)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ΑΒ = ΑΓ, τότε τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

Μονάδες 10

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ (4_3696)

Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ, Α και την Οy στα Λ, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΛ = ΒΚ.

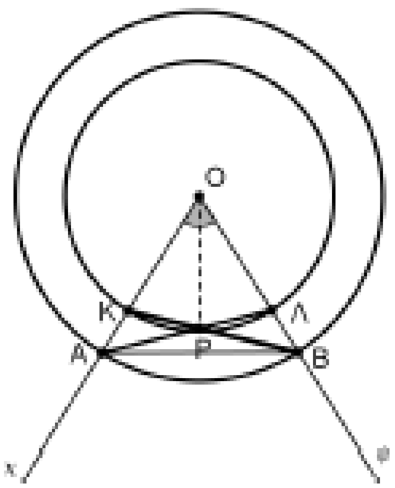
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.

Μονάδες 8

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την γωνία $x\hat{O}y$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3721)

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΓΗ

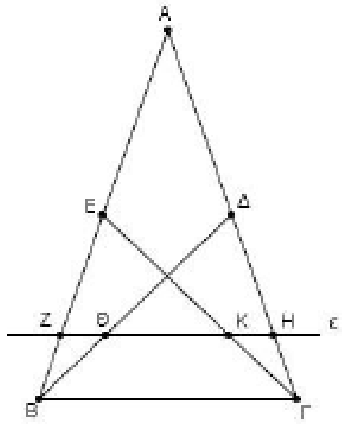
Μονάδες 8

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

Μονάδες 9

γ) ΖΚ = ΗΘ

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3726)

Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί την γωνία ΑΟΑ΄.

Μονάδες 6

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

Μονάδες 6

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. ΚΑ = ΚΑ΄

Μονάδες 6

ii. ΚΑ + ΚΒ > ΑΟ + ΟΒ

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (4_3728)

Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

I. ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ

Μονάδες 6

II. ΡΓ – ΓΔ = ΡΕ – ΔΕ

Μονάδες 8

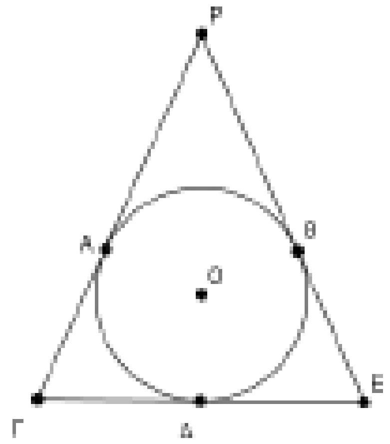
β) Αν ΑΓ = ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3729)

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) ΓΑ = ΔΒ

Μονάδες 8

γ) Η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ + ΡΒ

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (4_3767)

Δίνεται κύκλος (Ο, Κ) και μια επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B$ ίση με 120^0 . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ και στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο.

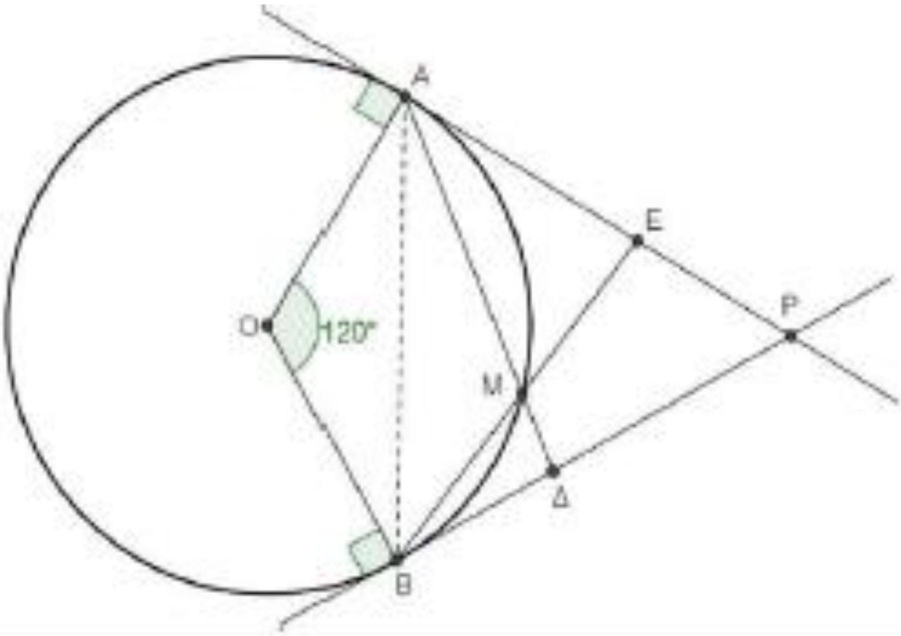
Μονάδες 8

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^0$.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΡΕΒ είναι ίσα.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_4741)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ . Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ=ΑΒ. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ=ΔΕ

(Μονάδες 6)

β) ΒΚ=ΚΔ

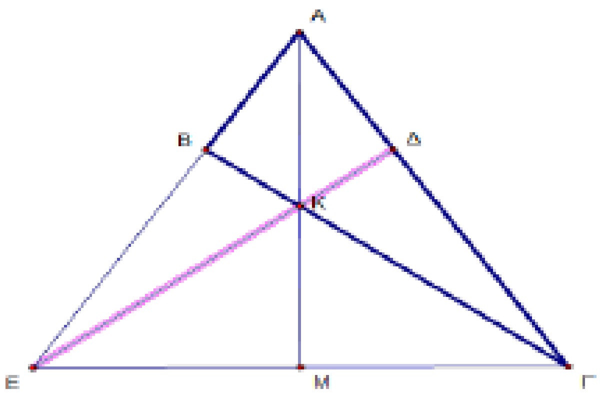
(Μονάδες 7)

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

(Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

(Μονάδες 6)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4806)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΖ = ΑΕ

Μονάδες 8

ii. ΑΚ = ΑΛ

Μονάδες 9

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8