<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ</u>

Η εξίσωση της μορφής **$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$** λέγεται **2^{ου} βαθμού,** αν το α δεν είναι μηδέν, διότι αν το α είναι μηδέν τότε η εξίσωση θα γίνει βx+γ=0 που είναι το πολύ 1^{ου} βαθμού. Επίσης λέγεται και τριώνυμο διότι αποτελείται από τρία μονώνυμα. Τα α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και ονομάζονται συντελεστές του τριωνύμου, ο α του x^2, ο β του x και ο γ σταθερός συντελεστής.

Είναι γνωστό από προηγούμενες τάξεις η λύση μιας τέτοιας εξίσωσης την οποία εδώ θα υπενθυμίσουμε.

Αρχικά φτιάχνουμε μία ποσότητα την οποία ονομάζουμε ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ (διότι μας βοηθά, να διακρίνουμε το είδος των ριζών της εξίσωσης), την συμβολίζουμε με Δ και είναι η: **$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$**

Με μία μέθοδο που ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνων, βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

1. Αν **Δ>0** τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις εξής. $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση που η διακρίνουσα είναι θετικός αριθμός τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές (διακριτές) πραγματικές ρίζες τις $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Παράδειγμα: Αν λυθεί η εξίσωση **$x^2+3x-4=0$**.

Λύση: Αρχικά θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές α, β, γ.

Εδώ έχουμε **α=1, β=3 και γ=-4**.

Μετά υπολογίζουμε την Διακρίνουσα. **$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$** και τέλος εφαρμόζουμε τον τύπο της εύρεσης των ριζών.

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-3+5}{2}=\dfrac{2}{2}=1\\[2ex]\dfrac{-3-5}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\end{array}\right.$$

. Άρα οι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση, δηλαδή οι ρίζες, είναι οι **$x_1=1$** και **$x_2=-4$**

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι το άθροισμα των συντελεστών του τριωνύμου έχει άθροισμα μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον μία από τις δύο ρίζες είναι το 1. Παράδειγμα στις εξισώσεις $x^2+4x-5=0$, $2x^2-3x+1=0$ η μία ρίζα είναι το 1.

Ασκήσεις

Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) $x^2+2x-15$ (3,-5) (ii) $2x^2-5x+2$ (1/2,2) (iii) x^2+x-2 (-2,1), (iv) x^2+5x+6 (-2,-3), (v) $15x^2-19x+6$ (2/3,3/5). Μέσα στις παρενθέσεις εμφανίζονται οι λύσεις.

2. Αν **Δ=0** τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα την οποία ονομάζουμε διπλή και η οποία δίνεται από τον τύπο $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Ουσιαστικά χρησιμοποιούμε τον τύπο της προηγούμενης περίπτωσης αλλά επειδή Δ=0 προκύπτει ο τύπος αυτός.

Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση που η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν τότε η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα και την ονομάζουμε διπλή διότι στην πραγματικότητα έχει δύο ρίζες οι οποίες όμως συμπίπτουν πχ έχει τις ρίζες $\chi_1=2$ και $\chi_2=2$, άρα έχει μία ρίζα την 2

Παράδειγμα: Αν λυθεί η εξίσωση **x^2-6x+9=0**.

Λύση: Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη περίπτωση θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές α, β, γ.

Εδώ έχουμε α=1, β=-6 και γ=9.

Μετά υπολογίζουμε την Διακρίνουσα εφαρμόζοντας τον τύπο της διακρίνουσας. **$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4.1.(-9)=0$,** και τέλος εφαρμόζουμε τον τύπο της εύρεσης των ριζών.

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2\cdot 1} = \frac{+6}{2} = +3$$

Άρα ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή είναι ρίζα της, είναι ο $x_o=3$

Ασκήσεις

Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) x^2-4x+4 (2), (ii) $4x^2+12x+9$ (-3/2) (iii) x^2+2x+1 (-1), (iv) x^2-2x+1 (+1), (v) $9x^2+12x+4$ (2/3). Μέσα στις παρενθέσεις εμφανίζονται οι λύσεις.

3. Αν **Δ<0** τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και λέμε ότι είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή κανένας πραγματικός αριθμός δεν την επαληθεύει.

Παράδειγμα: Αν λυθεί η εξίσωση $x^2+5x+9=0$.

Λύση: Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη περίπτωση θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές α, β, γ.

Εδώ έχουμε α=1, β=5 και γ=9.

Μετά υπολογίζουμε την Διακρίνουσα εφαρμόζοντας τον τύπο της διακρίνουσας. $Δ=β^2-4αγ=5^2-4\cdot 1\cdot 9=25-36=-11<0$.

Συνεπώς, επειδή η ορίζουσα Δ είναι αρνητική, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος να επαληθεύει την εξίσωση, λέμε δηλαδή ότι η εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

Ασκήσεις

Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες: (i) x^2-4x+5 , (ii) $4x^2+12x+10$, (iii) x^2+2x+2 , (iv) x^2-2x+2 , (v) $9x^2+12x+5$

Ξεφεύγει από την ύλη της τάξης μας το πιο κάτω, αλλά επειδή πολλοί μαθητές έχουν ακούσει για λύσεις που δεν είναι πραγματικές θα αναφέρουμε ότι σε αυτή την περίπτωση (δηλαδή όταν Δ<0) υπάρχουν δύο ρίζες (λύσεις) που λέγονται μιγαδικές και οι οποίες δίνονται από έναν τύπο που μοιάζει με τον αρχικό και είναι ο $x_{1,2}=\frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$. Όπως βλέπεται μέσα στην ρίζα υπάρχει η απόλυτη τιμή της διακρίνουσας αρά ένας θετικός αριθμός (τίποτε περίεργο εδώ). Το περίεργο είναι, αυτό το σύμβολο i που λέγεται φανταστική μονάδα και έχει την περίεργη ιδιότητα όταν υψωθεί στο τετράγωνο να μας δίνει το 1, δηλαδή $i^2=-1$. Ωστόσο δεν χρειάζεται να εμβαθύνουμε περισσότερο.

Ολοκληρώνοντας αυτό το πρώτο μέρος καλό θα ήταν να έχουμε υπόψη μας και τα πιο κάτω

1. Η εξίσωση **$αx^2+βx+γ=0$** έχει πραγματικές ρίζες αν η διακρίνουσα Δ είναι θετική ή μηδέν

2. Αν τα α και γ είναι ετερόσημοι αριθμοί, τότε το α·γ είναι αρνητικός αριθμός και συνεπώς το -4αγ είναι θετικός αριθμός και άρα η Διακρίνουσα είναι θετική. Καταλήγουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που τα α και γ είναι ετερόσημοι αριθμοί η εξίσωση **αx²+βx+γ=0** έχει πραγματικές ρίζες ή πραγματική ρίζα.
3. Αν στην εξίσωση **αx²+βx+γ=0** υπάρχουν τα α, β, γ η εξίσωση είναι πλήρης και λύνεται όπως είδαμε πιο πάνω.
4. Αν γ=0 τότε η εξίσωση γίνεται **αx²+βx=0** και μπορούμε να την λύσουμε χωρίς την βοήθεια της διακρίνουσας ως εξής: $\alpha x^2+\beta x=0 \Rightarrow x\cdot(\alpha x+\beta)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=-\frac{\beta}{\alpha}$
5. Αν β=0 τότε η εξίσωση γίνεται **αx²+γ=0** και μπορούμε να την λύσουμε χωρίς την βοήθεια της διακρίνουσας ως εξής: $\alpha x^2+\gamma=0 \Rightarrow x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$. Αν η ποσότητα −γ/α είναι θετική ή μηδέν τότε η ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$. Αν η ποσότητα −γ/α είναι αρνητική τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.