ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Αναρωτιέται κανείς τι αριθμός (θετικός ή αρνητικός;) θα βγει αν σε ένα τριώνυμο 2^{ου} βαθμού κάνουμε αντικατάσταση του x με έναν πραγματικό αριθμό.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

Αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό 2 το αποτέλεσμα θα είναι θετικό ή αρνητικό; Αν δεν κάνουμε την αντικατάσταση και τις πράξεις δεν μπορούμε να ξέρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Συνεπώς, κάνοντας τις πράξεις, έχουμε $2\cdot 2^2+3\cdot 2-5=2\cdot 4+6-5=8+6-5=9>0$. Αν τώρα αντικαταστήσουμε το x με -1 τι αποτέλεσμα θα έχουμε; Ας δούμε $2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-5=2\cdot 1-3-5=2-3-5=-6<0$. Αν μείνουμε σε αυτά τα δύο παραδείγματα μπορεί να οδηγηθούμε στην υπόθεση ότι αν αντικαταστήσουμε το x με θετικό αριθμό το αποτέλεσμα θα είναι θετικό ενώ αν αντικαταστήσουμε το x με αρνητικό αριθμό τότε το αποτέλεσμα είναι αρνητικό. Όμως προκειμένου να βγουν, από ένα πείραμα, ασφαλή συμπεράσματα πρέπει να επαναληφθεί πάρα πολλές φορές και εφόσον μια αρχική υπόθεσή μας επαληθεύεται κάθε φορά, τότε γινόμαστε όλο και πιο σίγουροι ότι η υπόθεση μας αληθεύει. Ας μην ξεχνάμε ότι αρκεί μία φορά να μην επαληθευθεί η υπόθεση για να την απορρίψουμε ή να την αναπροσαρμόσουμε για να ταιριάζει και με τα νέα δεδομένα. Ας επιχειρήσουμε λοιπόν αντικατάσταση του x και με άλλον αριθμό. Ας βάλουμε στην θέση του x το -6. Τότε $2\cdot(-6)^2+3\cdot(-6)-5=2\cdot 36-18-5=72-18-5=49>0$. Άρα η υπόθεση μας δεν είναι ορθή.

Θα πρέπει να προσεγγίσουμε το ζήτημα αλλιώς.

Το τριώνυμο παραγοντοποιείται όταν το Δ είναι θετικό ή μηδέν ενώ δεν παραγοντοποιείται όταν το Δ είναι αρνητικό, ωστόσο παίρνει και εκεί μία άλλη μορφή. Ας δούμε μία-μία τις περιπτώσεις:

Αν **Δ<0** τότε έχουμε: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ (σχολικό βιβλίο σελίδα 107)

Είναι φανερό ότι το δεύτερο μέλος της σχέσης αυτής έχει το πρόσημο του α αφού το $\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]>0$ με δεδομένο ότι το $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2>0$ αλλά και το $\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}>0$. Άρα μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού είναι πάντα ομόσημο (δηλαδή έχει το ίδιο πρόσημο) του α αν η διακρίνουσα του Δ είναι αρνητική.

Αν **Δ=0** ξέρουμε ότι το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$ την οποία για συντομία θα ονομάσουμε x_o, και τότε έχουμε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_o)^2$. Αν στην θέση του x θέσουμε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, με εξαίρεση την ρίζα x_o, τότε έχουμε ότι $(x-x_o)^2>0$ αφού το $x-x_o$ είναι υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα και σε αυτή την περίπτωση το τριώνυμο είναι ομόσημο του α με εξαίρεση την περίπτωση που στην θέση του x βάλουμε την ρίζα x_o, στην οποία περίπτωση το τριώνυμο μηδενίζεται.

Αν **Δ>0** ξέρουμε ότι το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες (έστω τις x_1, x_2) και τότε έχουμε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$.

Επειδή ξέρουμε ότι οι ρίζες είναι άνισες, η μία θα είναι μεγαλύτερη της άλλης. Ας υποθέσουμε ότι $x_1<x_2$.

Θα δούμε καθώς αντικαθιστούμε το x με διάφορους αριθμούς πιο πρόσημο έχει το τριώνυμο.

Έστω ότι ο αριθμός με τον οποίον αντικαθιστούμε το x είναι μικρότερος από την μικρότερη ρίζα, δηλαδή $x< x_1<x_2$. Τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$ άρα $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Αυτό σημαίνει ότι, αν το x είναι ένας αριθμός πιο μικρός από την μικρότερη ρίζα τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.

Έστω ότι ο αριθμός με τον οποίον αντικαθιστούμε το x είναι μεταξύ των δύο ριζών, δηλαδή $x_1<x<x_2$. Τότε είναι φανερό ότι $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$ άρα $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Αυτό σημαίνει ότι, αν το x είναι ένας αριθμός μεταξύ των δύο ριζών τότε το τριώνυμο είναι ετερόσημο (δηλαδή έχει αντίθετο πρόσημο) του α.

Έστω ότι ο αριθμός με τον οποίον αντικαθιστούμε το x είναι μεγαλύτερος από την μεγαλύτερη ρίζα, δηλαδή $x_1<x_2<x$. Τότε βλέπουμε ότι $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$ άρα $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Αυτό σημαίνει ότι αν το x είναι ένας αριθμός πιο μεγάλος από την μεγαλύτερη ρίζα τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.

Φυσικά αν ο επιλεγμένος αριθμός είναι μία από τις δύο ρίζες το τριώνυμο μηδενίζεται.

Όλα τα πιο πάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο κανόνα.

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι πάντα ίδιο με του α (κάθε κανόνας έχει και εξαιρέσεις) εκτός από το διάστημα μεταξύ των ριζών (αν υπάρχει τέτοιο διάστημα) που είναι αντίθετο, και στις ρίζες του (αν υπάρχουν ρίζες) που είναι μηδέν.

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το πιο κάτω που μας δίνει το πρόσημο στις έξη διαφορετικές περιπτώσεις. Αν Δ>0 ή Δ=0 ή Δ<0 σε συνδυασμό με το α<0 και α>0.

<table>
<tr><th></th><th>α > 0</th><th>α < 0</th></tr>
<tr><td>Δ>0</td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>x₁</td><td></td><td>x₂</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>x₁</td><td></td><td>x₂</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Δ=0</td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>x₀</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>x₀</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td>−</td><td>0</td><td>−</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Δ<0</td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td colspan="2">+</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>+∞</td></tr><tr><td>αx²+βx+γ</td><td colspan="2">−</td></tr></table></td></tr>
</table>

Αν έρθουμε στο αρχικό μας ερώτημα μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε ως εξής:

Βρίσκουμε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $2x^2+3x-5$ η οποία είναι η $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot2\cdot(-5)=49$ και κατόπιν τις ρίζες του οι οποίες είναι οι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2\cdot2}=\begin{cases}\dfrac{-3-7}{4}=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}\\[2mm]\dfrac{-3+7}{4}=\dfrac{4}{4}=1\end{cases}$.

Το τριώνυμο έχει Δ>0 και α=2>0 άρα από τον πίνακα πιο πάνω έχουμε τον πιο κάτω πίνακα τιμών

x	-∞	x_1		x_2	+∞
αx²+βx+γ	+	0	−	0	+

.

Συνεπώς προσαρμόζοντας τον πιο πίνακα στα δεδομένα του προβλήματός μας έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+1$		$+\infty$
$2x^2+3x-5$		+		−		+	

Διαπιστώνουμε ότι αν το x είναι ίσο με 2, το οποίο είναι μεγαλύτερο του +1, το τριώνυμο είναι θετικό, όπως διαπιστώσαμε και όταν κάναμε την αντικατάσταση στην αρχή και βρήκαμε 9>0.

Επίσης αν αντικαταστήσουμε το x με -1 που είναι μεταξύ των ριζών, το τριώνυμο είναι αρνητικό πράγμα που ανακαλύψαμε και στην αρχή (το τριώνυμο βρήκαμε ότι είναι ίσο με -6<0).

Τέλος, αν στην θέση του x θέσουμε το -6, επειδή αυτό είναι μικρότερο από την ρίζα -5/2 βλέπουμε ότι το τριώνυμο είναι θετικό και το ίδιο διαπιστώσαμε και στην αρχή όπου υπολογίσαμε το τριώνυμο ίσο με 49>0.

Τα πιο πάνω μπορούμε να εκμεταλλευτούμε για να λύνουμε ανισώσεις δευτέρου βαθμού. Ως παράδειγμα θα λύσουμε την ανίσωση $2x^2+3x-5<0$.

Όπως διαπιστώσαμε ήδη ο πίνακας τιμών του συγκεκριμένου τριωνύμου είναι ο

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+1$		$+\infty$
$2x^2+3x-5$		+		−		+	

Από τον οποίο βλέπουμε ότι το τριώνυμο είναι αρνητικό αν στην θέση του x τοποθετήσουμε οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα από τις ρίζες του. Συνεπώς έχουμε $2x^2+3x-5<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2},+1\right)$

Αν θέλαμε να λύσουμε την $2x^2+3x-5>0$ τότε από τον ίδιο πίνακα τιμών διαπιστώνουμε ότι $2x^2+3x-5>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-\frac{5}{2}) \cup (+1,+\infty)$