ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Έστω ότι έχουμε την αλγεβρική παράσταση x+2. Όταν στη θέση του x θέσουμε τον αριθμό 3 και εκτελέσουμε την πρόσθεση βρίσκουμε 3+2=5. Ο αριθμός 5 λέγεται αλγεβρική τιμή της παράστασης για x=3. Αναρωτιέται κανείς αν στην θέση του x μπορούμε να θέσουμε οποιονδήποτε αριθμό ή πρέπει να θέσουμε κάποιους περιορισμούς. Αν δημιουργήσουμε ένα σύνολο το οποίο περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς τους οποίους μπορούμε να θέσουμε στην θέση του x ώστε το αποτέλεσμα της αλγεβρικής παράστασης να είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι έχουμε βρει το πεδίο ορισμού της παράστασης. Στο παράδειγμά μας το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Οι παραστάσεις που θα μας απασχολήσουν εδώ, είναι δύο μορφών. Εκείνες που περιλαμβάνουν κάποιο κλάσμα στο οποίο στον παρονομαστή υπάρχει η μεταβλητή x και εκείνες στις οποίες περιέχεται ρίζα στις οποίας την υπόριζη ποσότητα υπάρχει η μεταβλητή x.

Ας δούμε τι κάνουμε αν έχουμε αλγεβρική παράσταση της πρώτης μορφής, δηλαδή αλγεβρική παράσταση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}$.

ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ ΝΑ ΠΑΡΕΙ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΜΗΔΕΝ

Επειδή κλάσμα στο οποίο ο παρονομαστής του είναι ίσος με μηδέν δεν ορίζεται, εξαιρούμε από τιμές του x όλους τους αριθμούς οι οποίοι μηδενίζουν τον παρονομαστή. Αν έχουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα βρίσκουμε για κάθε ένα το πεδίο ορισμού και κατόπιν βρίσκουμε την τομή των συνόλων αυτών. Δίνουμε τα πιο κάτω παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 1^o</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αλγεβρικής παράστασης $\frac{x+1}{x-2}$.

Λύση: Θα εξαιρέσουμε τις τιμές του x για τις οποίες ο παρονομαστής του κλάσματος γίνεται ίσος με μηδέν. Άρα πρέπει να βρούμε στην αρχή για ποιους αριθμούς μηδενίζεται ο παρονομαστής, λύνοντας την εξίσωση: $x-2=0$. Έχουμε $x-2=0 \Rightarrow x=2$. Συνεπώς στην θέση του x μπορούμε να θέσουμε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από τον αριθμό 2. Το πιο πάνω συμπέρασμα μπορούμε να το εκφράσουμε με την βοήθεια συνόλου ως έξης $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ή με την βοήθεια διαστημάτων ως εξής $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αλγεβρικής παράστασης $\frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$.

Λύση: Θα εξαιρέσουμε τις τιμές του x για τις οποίες ο παρονομαστής του κλάσματος γίνεται ίσος με μηδέν. Άρα πρέπει να βρούμε στην αρχή για ποιους αριθμούς μηδενίζεται ο παρονομαστής, λύνοντας την εξίσωση: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Έχουμε $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$. Άρα στην θέση του x μπορούμε να θέσουμε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από τους αριθμούς 1 και 2. Το πιο πάνω συμπέρασμα μπορούμε να το εκφράσουμε με την βοήθεια συνόλου ως εξής $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ ή με την βοήθεια διαστημάτων ως εξής $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

<u>Παράδειγμα 3^ο</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αλγεβρικής παράστασης $\dfrac{\frac{x+1}{x-3}}{\frac{1}{x^2 - 3x + 2}}$.

Λύση: Θα εξαιρέσουμε τις τιμές του x για τις οποίες οι παρονομαστές των κλασμάτων γίνονται ίσοι με μηδέν. Άρα πρέπει να βρούμε στην αρχή για ποιους αριθμούς μηδενίζονται οι παρονομαστές, λύνοντας τις εξισώσεις: $x - 3 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$ και $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$. Έχουμε $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$ και $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$ αδύνατο αφού το κλάσμα έχει αριθμητή ίσο με 1. Άρα στην θέση του x μπορούμε να θέσουμε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από τους αριθμούς 1, 2 και 3. Το πιο πάνω συμπέρασμα μπορούμε να το εκφράσουμε με την βοήθεια συνόλου ως εξής $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ ή με την βοήθεια διαστημάτων ως εξής $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Άσκηση για λύση: Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων: 1) x^3+4x^2-5, 2) $\frac{x-2}{x^2-7x+12}-\frac{5}{x+2}$, 3) $\frac{x+4}{x^2-1}$, 4) $\frac{x-24}{x^2+x+4}$, 5) $x+\frac{1}{x-3}$, 6) $\frac{3x}{8-2|x|}$, 7) $\frac{x-5}{4-(x-2)^2}$ 8) $9+\frac{2x+1}{3x-6}$

Απαντήσεις: 1) $x\in\mathbb{R}$, 2) $x\in\mathbb{R}-\{-2,3,4\}$, 3) $x\in\mathbb{R}-\{-1,+1\}$, 4) $x\in\mathbb{R}$, 5) $x\in\mathbb{R}-\{3\}$, 6) $x\in\mathbb{R}-\{-4,+4\}$, 7) $x\in\mathbb{R}-\{4,-2\}$, 8) $x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση αλγεβρικής παράστασης στην οποία περιέχεται κάποια ρίζα στο υπόριζο (αυτό που βρίσκεται μέσα στην ρίζα) της οποίας υπάρχει η μεταβλητή. Τέτοιες παραστάσεις λέγονται άρρητες.

ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ ΟΙ ΥΠΟΡΙΖΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΝΑ ΠΑΙΡΝΟΥΝ ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Σε αυτές τις παραστάσεις πρέπει η υπόριζη ποσότητα να μην είναι αρνητική, αφού από τον ορισμό της ρίζας γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει ρίζα αρνητικού αριθμού. Έτσι δεν υπάρχει η τετραγωνική ρίζα του -4, ή η τρίτη ρίζα του -8. Συνεπώς απαιτούμε η υπόριζη ποσότητα να είναι θετική ή μηδέν και αυτό είναι το πεδίο ορισμού της παράστασης. Αν η αλγεβρική παράσταση περιλαμβάνει δύο ή περισσότερα ριζικά, τότε βρίσκουμε το πεδίο ορισμού για κάθε ένα από αυτά και το πεδίο ορισμού όλης της αλγεβρικής παράστασης είναι η τομή των πεδίων ορισμού των υπόριζων ποσοτήτων που έχουμε βρει. Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 4ο</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αλγεβρικής παράστασης $\sqrt{x-1}$

Λύση: Δεν πρέπει η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην ρίζα να είναι αρνητική. Συνεπώς λύνουμε την ανίσωση $x-1\geq 0$ ως εξής: $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Άρα $x\in[1,+\infty)$

<u>Παράδειγμα 5ο</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της παράστασης $\sqrt{x+1}+\sqrt{-x+5}$.

Λύση: Δεν πρέπει καμία από τις υπόριζες ποσότητες να είναι αρνητική. Άρα η λύση του προβλήματος είναι η συναλήθευση των ανισώσεων $x+1\geq 0$ και $-x+5\geq 0$. Άρα λύνουμε κάθε μία από αυτές ως εξής: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ και $-x+5\geq 0 \leq -x\geq -5 \Leftrightarrow x\leq 5$. Αν συναληθεύσουμε τις δύο ανισώσεις έχουμε ότι $x\geq -1$ και $x\leq 5$.

Συνεπώς $-1 \le x \le 5$ ή, αν θέλουμε να απαντήσουμε με χρήση διαστήματος, $x \in [-1,5]$.

Ασκήσεις για λύση: να βρεθούν τα πεδία ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων : 1) $\sqrt{2x-6}$, 2) $\sqrt{4-12x}$, 3) $\sqrt{2x^2-5x+3}$, 4) $\sqrt{2x^2-5x+4}$.

Απαντήσεις: 1) $x \in [3,+\infty)$, 2) $x \in (-\infty,\frac{1}{3}]$, 3) $x \in (-\infty,-\frac{3}{2}] \cup [1,+\infty)$, 4) $x \in \mathbb{R}$.

Η επόμενη περίπτωση είναι η αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει και κλάσμα αλλά και ρίζα. Τότε το πεδίο ορισμού είναι η τομή των επιμέρους πεδίων ορισμού από την μελέτη του κλάσματος ή των κλασμάτων και των υπόριζων ποσοτήτων.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα:

<u>Παράδειγμα 6$^{\text{o}}$</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αλγεβρικής παράστασης $\frac{\sqrt{x-1}}{x-4}$

Λύση: Η αλγεβρική παράσταση έχει ένα κλάσμα και μία ρίζα. Άρα πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος, δηλαδή το x-4, να είναι διαφορετικός από το μηδέν και η υπόριζη ποσότητα, δηλαδή η x-1, να μην είναι αρνητική. Συνεπώς πρέπει να λύσουμε το σύστημα $x-4 \ne 0$ και $x-1 \ge 0$. Έτσι έχουμε $x-4 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 4$ και ταυτόχρονα $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. Άρα στην θέση του x μπορούν να τεθούν όλοι οι αριθμοί που είναι ίσιοι ή μεγαλύτεροι του 1 αλλά όχι το 4. Έτσι το πεδίο ορισμού είναι το $[1,+\infty)-\{4\}$ ή ισοδύναμα το $[1,4) \cup (4,+\infty)$.

<u>Παράδειγμα 7$^{\text{o}}$</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού τη αλγεβρικής παράστασης $\frac{x-1}{\sqrt{x-4}}$

Λύση: Η αλγεβρική παράσταση έχει μία ρίζα και ένα κλάσμα. Άρα πρέπει η υπόριζη ποσότητα, δηλαδή η x-4, να μην είναι αρνητική και ο παρονομαστής του κλάσματος, δηλαδή το $\sqrt{x-4}$, να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Συνεπώς πρέπει να λύσουμε το σύστημα $x-4 \ge 0$ και $\sqrt{x-4} \ne 0$. Έτσι έχουμε $x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ και ταυτόχρονα

$\sqrt{x-4} \neq 0 \Leftrightarrow x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$. Άρα στην θέση του x μπορούν να τεθούν όλοι οι αριθμοί που είναι ίσιοι ή μεγαλύτεροι του 4 αλλά όχι το 4. Έτσι το πεδίο ορισμού είναι το $(4,+\infty)$.

Ασκήσεις για λύση: να βρεθούν τα πεδία ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων : 1) $\sqrt{\dfrac{4x+12}{x-5}}$, 2) $\sqrt{\dfrac{-2x+8}{x+5}}$, 3) $\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+x+2}}$. 4) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{4-\sqrt{x+1}}$.

Απαντήσεις: 1) $x \in (-\infty,-3] \cup (5,+\infty)$, 2) $x \in (-5,4]$, 3) $x \in (-1,1] \cup (2,4]$ 4) $x \in [2,15) \cup (15,+\infty)$.

Άλλη μορφή των αλγεβρικών παραστάσεων είναι εκείνη που περιλαμβάνει λογάριθμο αλλά δεν είναι αντικείμενο της ύλης της Α΄Λυκείου.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν εφαπτομένη γωνίας. Όμως ας μην ξεχνάμε ότι ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Συνεπώς η περίπτωση αυτή περιλαμβάνεται στην περίπτωση των αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν κλάσμα.

Τελειώνοντας έχουμε αλγεβρικές παραστάσεις που δεν είναι καμίας μορφής από τις προηγούμενες. Σε αυτές το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.