ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. *Η επιτυχία του συγκέντρωσης είναι συνάρτηση των ανθρώπων που θα έρθουν.*
2. *Η απόφασή μου είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων.*
3. *Η βαθμολογία σου θα συναρτηθεί από το διάβασμά σου.*
4. *Ο μισθός ενός υπάλληλου είναι συνάρτηση των όσων μπορεί να προσφέρει στην εταιρεία.*
5. *Το ποσό του ηλεκτρικού ρεύματος που θα διέλθει από έναν αγωγό είναι συνάρτηση της αντίστασης του αγωγού και της τάσης που θα εφαρμοσθεί στα άκρα του.*

Όλες οι πιο πάνω εκφράσεις έχουν κάτι κοινό. Σε όλες τις εκφράσεις φαίνεται ότι κάτι (ένα μέγεθος, μια κατάσταση κ.λ.π) επηρεάζεται από κάτι άλλο. Στην πρώτη η επιτυχία τη συγκέντρωσης εξαρτάται από ποιοι θα έρθουν, στην δεύτερη φαίνεται ότι έχει ληφθεί μια απόφαση αφού μελετήθηκαν κάποια αλλά πράγματα ή γεγονότα ή καταστάσεις κλπ, στην τρίτη είναι σαφές ότι η βαθμολογία ενός μαθητή εξαρτάται από το πόσο έχει διαβάσει, στην τέταρτη είναι φανερό ότι όσο πιο χρήσιμος είναι ο υπάλληλος για την εταιρεία τόσο πιο καλή θα είναι η μισθολογική του εξέλιξη και στην πέμπτη (παράδειγμα από την φυσική) το πόσο ρεύμα θα διέλθει από έναν αγωγό εξαρτάται από δύο άλλα μεγέθη, την τάση και την αντίσταση.

Άρα υπάρχουν πολλές φορές μεγέθη τα οποία όταν μεταβάλλεται το ένα μεταβάλλεται και το άλλο. Αυτά τα μεγέθη τα ονομάζουμε συμμεταβαλλόμενα. Τέτοια παραδείγματα, όπως τα πιο πάνω, υπάρχουν πάρα πολλά και ο καθένας μπορεί να βρει.

Ας δούμε όμως ακόμα δύο παραδείγματα τέτοιων συμμεταβαλλομένων ποσών.

1. *Τα κιλά μήλα που θα αγοράσει κανείς και τα χρήματα που θα πληρώσει με δεδομένο ότι το κάθε κιλό μήλα κοστίζει 0,80€.*
2. *Οι μέρες της εβδομάδας από Κυριακή 20 Μαρτίου έως Σαββάτο 26 Μαρτίου και αν θα έχουμε βροχόπτωση αλλά και η ώρα που θα συμβεί η βροχόπτωση.*

Τα δύο πιο πάνω παραδείγματα συμμεταβολλομένων ποσών έχουν μια σημαντική διαφορά. Στο πρώτο παράδειγμα μπορώ κάθε φορά να ξέρω πόσα χρήματα θα πληρώσω για τα κιλά μήλα που θα αγοράσω εκ των προτέρων, αφού μπορώ να πολλαπλασιάσω το ποσό των κιλών που θα αγοράσω με το 0,80. Παραδείγματος χάριν αν αγοράσω 5,5 κιλά μήλα θα πληρώσω 5,5Χ0,8=4,4€. Στο δεύτερο παράδειγμα δεν έχουμε τέτοια δυνατότητα, δηλαδή δεν μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων αν την ημέρα της εθνικής εορτής, την $25^{η}$ Μαρτίου, θα βρέξει και στην περίπτωση που θα βρέξει πότε θα συμβεί αυτό για να μπορέσουμε να προγραμματίσουμε καλύτερα τον εορτασμό.

Σαν τα πιο πάνω παραδείγματα υπάρχουν πάμπολλα, άλλα στα οποία ξέρουμε την ακριβή τρόπο εξάρτησης των ποσών που συμμεταβάλλονται και άλλα που δεν γνωρίζουμε τον τρόπο της εξάρτησης τους.

Στα μαθηματικά μας ενδιαφέρουν ποσά όπως στο πρώτο παράδειγμα διότι εκεί έχουμε τον τρόπο συμμεταβολής και εύκολα μπορούμε να τον μελετήσουμε.

Προχωρώντας ακόμα πιο πέρα, μπορούμε με μελέτη, να διαπιστώσουμε ότι τα ποσά που συμμεταβάλλονται είναι στοιχεία κάποιων συνόλων. Στο παράδειγμα με τα μήλα μπορούμε να πούμε ότι το ποσό των μήλων είναι ένας θετικός αριθμός και άρα τα κιλά τα μήλα ανήκουν στο σύνολο $(0, +\infty)$, αν υποθέσουμε ότι έχουμε άπειρα χρήματα για να αγοράσουμε άπειρα κιλά μήλων. Επίσης το ποσό των χρημάτων που θα χρειαστεί να πληρώσουμε είναι ένας θετικός αριθμός άρα και εδώ έχουμε ότι το κόστος των μήλων είναι ένα στοιχείο που ανήκει στο σύνολο $(0, +\infty)$. Συνεπώς, εκτός από τον τρόπο συμμεταβολής των δύο ποσών, χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε και τα σύνολα στα οποία είναι μέλη τα ποσά.

Στο παράδειγμα των μήλων είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πόσα χρήματα μπορεί να μας κοστίσουν αυτά που θα αγοράσουμε για έχουμε μαζί μας τα ανάλογα ποσό. Ας υποθέσουμε ότι δεν επιθυμούμε να αγοράσουμε πάνω από 10 κιλά μήλα (στην περίπτωση που είναι πολύ καλά) αλλά δεν θα θέλαμε να αγοράσουμε και κάτω από 5 κιλά διότι αυτές είναι οι ανάγκες της οικογένειάς μας για μία εβδομάδα. Άρα το ποσό των κιλών των μήλων που θα αγοράσουμε είναι στοιχείο του διαστήματος $[5, 10]$. Είναι φανερό, με την πιο πάνω υπόθεση, ότι θα πληρώσουμε από 4€ (αν αγοράσουμε το ελάχιστο των 5 κιλών) έως 8€ (αν αγοράσουμε το μέγιστο των 10 κιλών). Συνεπώς το ποσό των χρημάτων που θα πληρώσουμε είναι ένας αριθμός που βρίσκεται στο διάστημα $[5, 10]$.

Από όλα τα παραδείγματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί, στα μαθηματικά θα ασχοληθούμε με εκείνα που τα ποσά που συμμεταβάλλονται είναι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης θα ασχοληθούμε με εκείνα τα παραδείγματα στα οποία η αλληλεξάρτηση των ποσών ακολουθεί κανόνα με συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Οι κανόνες που έχουν αυτό το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό ονομάζονται συναρτήσεις. Ας δούμε όμως τι θα λέμε συνάρτηση και πιο είναι το χαρακτηριστικό αυτό που διαφοροποιεί τις συναρτήσεις από τις άλλες σχέσεις στις οποίες έχουμε δύο συμμεταβαλλόμενα ποσά. Θα δώσουμε συνεπώς το ορισμό της συνάρτησης.

Ορισμός ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. **Συνάρτηση** από ένα **σύνολο Α** σε ένα **σύνολο Β** λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία **κάθε στοιχείο** του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε **ένα ακριβώς στοιχείο** του συνόλου Β.

Παράδειγμα 1^{o}: Ας δούμε ένα παράδειγμα σχέσης μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων. Θεωρούμε το σύνολο Α όλων των φυσικών αριθμών από το 1 έως το 5, δηλαδή Α={1, 2, 3, 4, 5}. Σε κάθε στοιχείο-αριθμό του συνόλου Α αντιστοιχίζουμε το διπλάσιο του προσαυξημένο κατά 1. Άρα στο 1 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 1x2+1=3. Στο 2 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 2x2+1=5. Στο 3 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 3x2+1=7 Στο 4 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 4x2+1=9 Στο 5 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 5x2+1=11. Ας συγκεντρώσουμε σε ένα σύνολο Β όλα τα αποτελέσματα. Έχουμε Β={3, 5, 7, 9, 11}. Παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχείο του συνόλου Α υπάρχει αντιστοίχιση σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Β. Άρα αυτή η σχέση που φτιάξαμε είναι συνάρτηση.

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2^{o}: Έστω το σύνολο των ακεραίων από το -2 έως το 3, δηλαδή το σύνολο Α={-2, -1, 0, 1, 2, 3} και ας αντιστοιχίσουμε σε κάθε αριθμό του το τετράγωνό του προσαυξημένο κατά 5. Τότε έχουμε τις εξής αντιστοιχίες. Το -2 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (-2)x(-2)+5=9. Το -1 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (-1)x(-1)+5=6. Το 0 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (0)x(0)+5=5. Το 1 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (1)x(1)+5=5. Το 2 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (2)x(2)+5=9. Το 3 αντιστοιχίζεται στο αριθμό (3)x(3)+5=14. Αν με τα αποτελέσματα φτιάξουμε ένα σύνολο, που θα το ονομάσουμε Β, θα έχουμε Β={5, 6, 9, 14}. Ας δούμε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις για να χαρακτηριστεί αυτή η διμελής σχέση (δηλαδή σχέση μεταξύ των μελών των δύο συνόλων Α και Β) συνάρτηση. Όλα τα στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε στοιχεία του B. Επίσης διαπιστώνουμε ότι κάθε στοιχείο του A, αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του B. Συγκεκριμένα το -2 μόνο στο 9, το -1 μόνο στο 6, το 0 μόνο στο 5, το 1 μόνο στο 5, το 2 μόνο στο 9 και το 3 μόνο στο 14. Δεν πειράζει που το στοιχείο 9 του συνόλου B είναι η αντιστοίχηση δύο στοιχείων του συνόλου A, των -2 και 2, αφού μόνο τα στοιχεία του A δεν πρέπει να αντιστοιχίζονται σε δύο στοιχεία του συνόλου B και όχι το αντίθετο. Συνεπώς εδώ έχουμε συνάρτηση.

Παράδειγμα 3^{ο}: Θα δούμε τώρα ένα ακόμα παράδειγμα αντιστοίχισης των στοιχείων ενός συνόλου στα στοιχεία ενός άλλου συνόλου. Θεωρούμε το σύνολο A={0, 1, 2} και το σύνολο B={-2, -1, 0, 1, 3}. Δημιουργούμε την εξής αντιστοιχία. Κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε εκείνα τα στοιχεία του συνόλου B τα οποία είναι απόλυτη τιμή τους. Συνεπώς το 0 αντιστοιχίζεται στο 0, αφού |0|=0, το 1 αντιστοιχίζεται στο -1 αλλά και στο 1, αφού |-1|=|1|=1 και το 2 αντιστοιχίζεται στο -2 αφού |-2|=2 με δεδομένο ότι το 2 δεν είναι στοιχείο του συνόλου B. Είναι όμως αυτή η σχέση συνάρτηση; Αρχικά διαπιστώνουμε ότι κάθε στοιχείο του A έχει αντιστοιχηθεί σε στοιχείο του B. Όμως ένα στοιχείο του A, το 1, έχει αντιστοιχηθεί σε δύο στοιχεία του B, τα 1 και -1. Συνεπώς δεν πληρείται ο όρος του ορισμό που λέει ότι κάθε στοιχείο του A πρέπει να αντιστοιχίζεται **σε ένα μόνο στοιχείο του B**.

Σε όλα τα παραδείγματα συναρτήσεων που είδαμε, υπάρχει πάντα ένα σύνολο A, τα στοιχεία του οποίου αντιστοιχίζουμε στα στοιχεία ενός συνόλου B. Το **σύνολο A ονομάζουμε πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και το **σύνολο B σύνολο τιμών**. Είναι προφανές ότι το A είναι ένα σύνολο και συνεπώς αντί για πεδίο ορισμού μπορούμε να το λέμε σύνολο ορισμού. Το σύνολο B που περιέχει όλα τα στοιχεία που είναι αυτά στα οποία αντιστοιχίζονται όλα τα στοιχεία του συνόλου A το ονομάζουμε σύνολο τιμών. Εδώ πρέπει να διευκρινίσουμε ότι στο B μπορούν να περιέχονται και άλλα στοιχεία πέραν των στοιχείων στα οποία αντιστοιχίζονται τα στοιχεία του B. Τότε όμως το σύνολο **B το ονομάζουμε σύνολο αφίξεως**.

Στο 1^{ο} παράδειγμα ορίσαμε έναν κανόνα (διαδικασία) με τον οποίο αντιστοιχίσαμε τα στοιχεία του συνόλου A στα στοιχεία του συνόλου B. Ας επιχειρήσουμε όμως να δημιουργήσουμε έναν μαθηματικό τύπο που να περιγράφει τον κανόνα. Είπαμε ότι: *«Σε κάθε στοιχείο-αριθμό του συνόλου A αντιστοιχίζουμε το διπλάσιο του προσαυξημένο κατά 1»*. Έστω x το στοιχείο του συνόλου A. Δηλαδή το x μπορεί να είναι 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5. Τότε το στοιχείο του Β που ψάχνουμε είναι αυτό που προκύπτει αν διπλασιάσουμε το x, δηλαδή το κάνουμε 2x, και σε αυτό προσθέσουμε 1, δηλαδή 2x+1. Αυτό τον κανόνα μπορούμε να τον συμβολίσουμε f(x), από την αγγλική λέξη function που σημαίνει λειτουργία. Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι η συνάρτηση που φτιάξαμε στο $1^{ο}$ παράδειγμα είναι η f(x)=2x+1, της οποίας πεδίο ορισμού είναι το Α={1, 2, 3, 4, 5} και σύνολο τιμών το Β={3, 5, 7, 9, 11}.

Ας κάνουμε ανάλογα πράγματα για το $2^{ο}$ παράδειγμα στο οποίο ορίσαμε έναν άλλο κανόνα (διαδικασία) με τον οποίο αντιστοιχίσαμε τα στοιχεία του συνόλου Α στα στοιχεία του συνόλου Β. Ας επιχειρήσουμε και εδώ να δημιουργήσουμε έναν μαθηματικό τύπο που να περιγράφει τον κανόνα. Είπαμε ότι: *«αντιστοιχίζουμε σε κάθε αριθμό του Α το τετράγωνό του προσαυξημένο κατά 5»*. Έστω x το στοιχείο του συνόλου Α. Δηλαδή το x μπορεί να είναι -2 ή -1 ή 0 ή 1 ή 2 ή 3. Τότε το στοιχείο του Β που ψάχνουμε είναι αυτό που προκύπτει αν υψώσουμε το x στο τετράγωνο και σε αυτό προσθέσουμε 5, δηλαδή x^2+5. Αν και εδώ συμβολίσουμε τον κανόνα με f(x) μπορούμε να γράψουμε ότι η συνάρτηση που φτιάξαμε στο $2^{ο}$ παράδειγμα είναι η $f(x)=x^2+5$, της οποίας πεδίο ορισμού είναι το Α={-2, -1, 0, 1, 2, 3} και σύνολο τιμών είναι Β={5, 6, 9, 14}.

Ας συνεχίσουμε την μελέτη της συνάρτησης.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* μπορούμε να το συμβολίσουμε D_f από το Domain of definition, την αγγλική μετάφραση του πεδίου ορισμού. Επίσης χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό A_f.

Μπορούμε τον κανόνα, που από εδώ και πέρα θα τον λέμε τύπο, να τον συμβολίζουμε και με άλλα γράμματα, όπως g, h κλπ. Στο $1^{ο}$ παράδειγμα θα μπορούσαμε να γράψουμε g(x)=2x+1 και στο $2^{ο}$ παράδειγμα $h(x)=x^2+5$. Επίσης αντί να γράψουμε g(x)=2x+1 μπορούμε να γράψουμε y=2x+1, συμβολίζοντας τα στοιχεία του συνόλου Β με y. Άρα πρέπει να γίνει απόλυτα κατανοητό ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, δηλαδή του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, και το y στοιχείο του συνόλου Β, δηλαδή του συνόλου τιμών. **Το x ονομάζουμε ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη μεταβλητή**.

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι τον ορισμό της συνάρτησης πληρούν και σχέσεις που δεν έχουν να κάνουν με αριθμούς. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο Α που αποτελείται από το σύνολο των ενοίκων μιας πολυκατοικίας και το σύνολο Β έχει δύο μόνο στοιχεία τα ΝΑΙ και ΟΧΙ. Δημιουργούμε την πιο κάτω αντιστοίχιση. Σε κάθε άνθρωπο, κάτοικο της πολυκατοικίας, αντιστοιχίζουμε το ΝΑΙ αν είναι κάτοχος πτυχίου τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (ΑΕΙ, ΑΤΕΙ κλπ) ή το ΟΧΙ αν δεν είναι. Είναι προφανές ότι όλοι οι ένοικοι αντιστοιχίζονται σε ένα από τα δύο στοιχεία του Β και κανένας δεν αντιστοιχίζεται και στα δύο. Άρα ο κανόνας που δημιουργήσαμε είναι συνάρτηση. Εμείς θα περιορισθούμε στην μελέτη συναρτήσεων στις οποίες τα σύνολα Α και Β είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή υποσύνολά του. Αυτές τις συναρτήσεις στα μαθηματικά τις ονομάζουμε **πραγματικές συναρτήσεις** (αφού το Β περιέχει πραγματικούς αριθμούς) **πραγματικής μεταβλητής** (αφού το Α περιέχει πραγματικούς αριθμούς).

Μια συνάρτηση για να είναι πλήρως γνωστή πρέπει να περιλαμβάνει τον τύπο της, δηλαδή τον κανόνα με τον οποίο τα στοιχεία του Α αντιστοιχίζονται στα στοιχεία του Β, το πεδίο ορισμού της, δηλαδή το σύνολο από το οποίο θα μπορούμε να αντικαθιστούμε στην θέση του x αριθμούς και το σύνολο τιμών που είναι το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων που προκύπτουν μετά την αντικατάσταση όλων των στοιχείων του πεδίου ορισμού στον τύπο της συνάρτησης. Όμως το πεδίο ορισμού συνήθως δεν δίνεται στις ασκήσεις και τότε θεωρούμε ότι είναι το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για το οποίο ο τύπος της συνάρτησης έχει έννοια πραγματικού αριθμού. Επίσης μπορούν να ισχύουν και πρόσθετα κριτήρια για τον καθορισμό του πεδίου ορισμού μια συνάρτησης. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δημιουργήσει μια συνάρτηση η οποία μας δίνει τις ημέρες που χρειάζονται για να ολοκληρωθεί ένα κατασκευαστικό έργο όταν μας δίνεται το πλήθος των εργατών που θα δουλέψουν στο εργοτάξιο και οι οποίο δεν μπορούν να είναι πάνω από 20 για οικονομικούς λόγους. Είναι σαφές ότι, από την φύση του προβλήματος, το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης δεν μπορεί να περιλαμβάνει αρνητικούς αριθμούς αλλά ούτε δεκαδικούς. Συνεπώς πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών από το 1 έως του 20.