## <u>ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ</u>

## <u>ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u>

Είδαμε ήδη τι είναι η συνάρτηση. Περιληπτικά μια συνάρτηση πρέπει να έχει έναν κανόνα (αλλιώς μια διαδικασία) με την οποία συνδέει (αντιστοιχίζει) στοιχεία (μέλη) ενός συνόλου Α (πεδίο ορισμού) με στοιχεία ενός άλλου συνόλου Β (σύνολο τιμών).

Τώρα πρέπει να ασχοληθούμε πιο πολύ με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δηλαδή με το σύνολο από το οποίο η συνάρτηση αντλεί τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής της. Οι συναρτήσεις οι οποίες θα μας απασχολήσουν είναι πραγματικές συναρτήσεις (δηλαδή το Β είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή υποσύνολό του), πραγματικής μεταβλητής (δηλαδή το Α είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή υποσύνολό του). Άρα πρέπει να φροντίζουμε ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι πραγματικός αριθμός και ταυτόχρονα το αποτέλεσμα της συνάρτησης να είναι πραγματικός αριθμός. Αν δοθεί ο τύπος μια συνάρτησης πρέπει να δοθεί και το πεδίο ορισμού της. Όμως στις ασκήσεις (συνήθως) δεν δίνεται το πεδίο ορισμού και τότε πρέπει να το προσδιορίσουμε εμείς. Γιαυτό ορίζουμε σαν πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ώστε ο κανόνας f(x), να είναι πραγματικός αριθμός.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 1$^{o}$</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της.

<u>Λύση</u>: Επειδή το αποτέλεσμα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει το x πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός, δεν πρέπει να μηδενισθεί ο παρονομαστής του κλάσματος. Άρα πρέπει να έχουμε $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$. Άρα στην θέση του x μπορούμε να βάλουμε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό εκτός από το 2. Αυτό απεικονίζεται ως σύνολο με τον εξής τρόπο, $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ ή $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

Από το πιο πάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι κάθε φορά που στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει κλάσμα πρέπει να φροντίζουμε ώστε ο παρονομαστής του να μην γίνει ίσος με μηδέν. Άρα μπορούμε να πούμε γενικά ότι : Αν $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ τότε πρέπει $B(x)\neq 0$

Με το σκεπτικό που αναπτύξαμε πιο πάνω θα βρούμε το πεδίο ορισμού και μιας ακόμα συνάρτησης.

Παράδειγμα 2ο: Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x-3}}{\dfrac{x-2}{x+2}}$. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της.

Λύση: Εδώ η συνάρτηση έχει τέσσερα κλάσματα άρα έχει τέσσερεις παρονομαστές. Πρέπει κάθε ένας από αυτούς να είναι διάφορος του μηδενός. Συνεπώς πρέπει να ισχύουν τα εξής: $x+1\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ x-3\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ x+2\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ \dfrac{x-2}{x+2}\neq 0$. Δηλαδή πρέπει να ισχύουν τα $x\neq -1 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq 3 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq -2 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq 2$. Άρα για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g έχουμε, $D_g=\mathbb{R}-\{-2,-1,2,3\}$ διότι αν στην θέση του x, στον τύπο της συνάρτησης g, θέσουμε έναν από αυτούς τους τέσσερεις αριθμούς (-2, -1, 2, 3), μηδενίζεται ο αντίστοιχος από τους τέσσερεις παρονομαστές.

Παράδειγμα 3ο: Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της.

Λύση: Παρατηρούμε ότι στον τύπο αυτής της συνάρτησης υπάρχει μια τετραγωνική ρίζα. Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού αφού, αν υπήρχε, θα έπρεπε το τετράγωνο ενός αρνητικού αριθμού να είναι θετικός αριθμός, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς εδώ πρέπει να φροντίσουμε το x να αντικαθίσταται με πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι δεν θα κάνουν την ποσότητα που βρίσκεται μέσα στην τετραγωνική ρίζα (την υπόριζο ποσότητα) αρνητικό αριθμό. Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$. Άρα $D_h=[2,+\infty)$. Δηλαδή το x μπορούμε να το αντικαθιστούμε με πραγματικούς αριθμούς μεγαλύτερους ή ίσους του 2.

Από το πιο πάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι κάθε φορά που στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει ρίζα (οποιασδήποτε τάξεως) πρέπει να φροντίζουμε ώστε η υπόριζη ποσότητα να μη γίνεται αρνητική. Άρα μπορούμε να πούμε γενικά ότι : Αν $f(x)=\sqrt{A(x)}$ τότε πρέπει $A(x)\geq 0$

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 4°</u>: Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της.

<u>Λύση</u>: Όπως έχουμε πει, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να μην είναι αρνητική. Άρα πρέπει $x^2-3x+2\geq 0$. Λύνουμε την ανίσωση που προέκυψε, η οποία είναι δευτέρου βαθμού όπως ξέρουμε. $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1$. Άρα $x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$. Τελικά οι αριθμοί που μηδενίζουν την υπόριζη ποσότητα είναι οι 2 και 1. Άρα κατασκευάζοντας τον πιο κάτω πίνακα προσήμων,

| x | $-\infty$ | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$-3x+2 | + | 0 | − | 0 | + |

έχουμε ότι το x πρέπει να είναι αριθμός μικρότερος ή ίσος του 1 ή μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Συνεπώς γράφουμε ότι $D_h=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

<u>Παράδειγμα 5°</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}$. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού της.

<u>Λύση</u>: Διαπιστώνουμε ότι στον τύπο αυτής της συνάρτησης υπάρχει κλάσμα αλλά και ρίζα. Συνεπώς πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι ο παρονομαστής του κλάσματος πρέπει να μην είναι μηδέν και η υπόριζη ποσότητα να μην είναι αρνητική. Συνεπώς πρέπει να ισχύουν τα εξής: $2x-1\neq 0 \; \kappa\alpha\iota \; x^2-3x+2\geq 0$. Από την λύση αυτών, έχουμε ότι $(x\neq\frac{1}{2}) \; \kappa\alpha\iota \; (x\leq 1 \; \acute{\eta} \; x\geq 2)$. Άρα $D_h=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]\cup[2,+\infty)$.

Από το πιο πάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι κάθε φορά που στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει κλάσμα και ρίζα πρέπει να φροντίζουμε ώστε ο παρονομαστής του κλάσματος να μην γίνει ίσος με μηδέν και η υπόριζη ποσότητα να μη γίνεται αρνητική.

Στην φετινή χρονιά δεν πρόκειται να δούμε άλλες περιπτώσεις πεδίων ορισμού συναρτήσεων εκτός των πιο πάνω. Συνεπώς αν μία συνάρτηση δεν έχει ούτε κλάσμα ούτε ρίζα, οποιασδήποτε τάξεως, τότε το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

Ας δούμε όμως και κάποιες ιδιαίτερες περιπτώσεις.

Θα λύσουμε το εξής πρόβλημα.

Πρόβλημα 1$^{o}$: Το εμβαδόν ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 400τμ.

α) Να κατασκευασθεί συνάρτηση η οποία να δίνει το πλάτος του οικοπέδου αν το μήκος του είναι x.

β) Αν το μήκος του οικοπέδου είναι τετραπλάσιο του πλάτους του να βρείτε τις διαστάσεις του.

Λύση: Αν x το μήκος του, τότε f(x) είναι το πλάτος του.

α) Επειδή το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 400τμ έχουμε ότι $f(x)\cdot x = 400 \Rightarrow f(x) = \frac{400}{x}$. Άρα η συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{400}{x}$

β) Επειδή το μήκος του οικοπέδου είναι x και το πλάτος του είναι τετραπλάσιο έχουμε ότι το πλάτος του είναι 4x. Όμως το πλάτος του δίνεται από την συνάρτηση που κατασκευάσαμε, άρα έχουμε $f(x) = 4x$. Συνεπώς ισχύει $\frac{400}{x} = 4x \Leftrightarrow 4x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$.

Άρα το οικόπεδο έχει διαστάσεις, πλάτος=10 μέτρα και μήκος=40 μέτρα, ή πλάτος=-10 μέτρα και μήκος=-40 μέτρα. Από την φύση του προβλήματος (το x είναι γεωμετρικό μέγεθος) έχουμε ότι το x πρέπει να είναι θετικός αριθμός. Άρα η λύση x=-10 απορρίπτεται. Τελικά έχουμε ότι οι διαστάσεις του οικοπέδου είναι πλάτος=10 μέτρα και μήκος=40 μέτρα.

Πρόβλημα 2$^{o}$: Ρώτησαν ένα εργολάβο έργων, πόσοι εργάτες θα χρειασθούν για να βαφτεί ένα σπίτι 100 τετραγωνικών μέτρων. Αυτός, επειδή του άρεσαν τα μαθηματικά, τους είπε ότι: «Έχω φτιάξει μία συνάρτηση για να λύνω τέτοια προβλήματα. Συγκεκριμένα αν πολλαπλασιάσω τον αριθμό των εργατών με τον εαυτό του και μετά από το αποτέλεσμα αφαιρέσω το διπλάσιό του, τέλος δε αν προσθέσω το ογδόντα πέντε το αποτέλεσμα θα είναι τα τετραγωνικά του σπιτιού». Τελικά πόσοι εργάτες θα χρειασθούν;

Λύση: Τα λόγια του εργολάβου οδηγούν σε κατασκευή μιας συνάρτησης που είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού. Αν θέσουμε ως f(x) τα τετραγωνικά του σπιτιού και αν x είναι οι εργάτες που θα χρειασθούν, τότε είπε: «αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό αυτό με τον εαυτό του» δηλαδή $x^2$, είπε: «και μετά από το αποτέλεσμα αφαιρέσουμε το διπλάσιό του» δηλαδή $x^2$-2x, είπε: «τέλος δε αν προσθέσω ογδόντα πέντε» δηλαδή $x^2$-2x+85, είπε : «το αποτέλεσμα θα είναι τα τετραγωνικά του σπιτιού» δηλαδή $f(x)=x^2-2x+85$.

Άρα κατασκευάσαμε μία συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+85$ και στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι f(x)=100 άρα $x^2-2x+85=100$ άρα $x^2-2x-15=0$. Έχουμε $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64$. Συνεπώς οι ρίζες είναι οι $x_{1,2}=\frac{+2\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm8}{2}=\begin{cases}\frac{+2+8}{2}=\frac{10}{2}=5\\ \frac{+2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3\end{cases}$. Συνεπώς οι εργάτες που θα δουλέψουν στο έργο θα είναι -3 ή 5. Όμως, αφού πρόκειται για ανθρώπους το αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Άρα η λύση -3, αν και είναι λύση της εξίσωσης που βγαίνει από τα λόγια του εργολάβου, δεν θα γίνει δεκτή και θα απαντήσουμε ότι οι εργάτες που θα χρειασθούν για την δουλεία είναι 5.

Η λύση των πιο πάνω προβλημάτων καταλήγει σε κατασκευή συναρτήσεων των οποίων τα πεδία ορισμού καθορίζονται από την φύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα στο $1^o$ πρόβλημα πού λύσαμε, αν και το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης που προκύπτει είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών με εξαίρεση το 0, δεν κάνουμε δεκτή την αρνητική λύση αφού ο αριθμός αντιστοιχεί σε γεωμετρικό μέγεθος που δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Στο $2^o$ πρόβλημα πού λύσαμε, αν και το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης που προκύπτει είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δεν κάνουμε δεκτή την αρνητική λύση αφού ο αριθμός αντιστοιχεί σε πλήθος ανθρώπων που δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$, 2) $f(x)=\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$, 3) $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x-9|}$,

4) $f(x)=\sqrt{x^2-9x+8}$, 5) $f(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-9x+8}}$,

6) $f(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-9x+8}}+\sqrt{x+2}$, 7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3|x|-2}}{x^2-9|x|+8}$,

8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-9x+8}}$, 9) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3-x}$, 10) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) $D_f=\mathbb{R}-\{-3,+3\}$, 2) $D_f=(-\infty,-3)\cup(+3,+\infty)$, 3) $D_f=\mathbb{R}-\{9\}$,

4) $D_f=(-\infty,1]\cup[8,+\infty)$, 5) $D_f=(-\infty,1)\cup(8,+\infty)$, 6) $D_f=[-2,1)\cup(8,+\infty)$,

7) $D_f=(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},1)\cup(1,8)\cup(8,+\infty)$, 8) $D_f=[\frac{2}{3},1)\cup(8,+\infty)$,

9) $D_f=\mathbb{R}-\{-1,0,+1\}$, 10) $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$