ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Υπάρχει ένας τύπος συναρτήσεων που λέγεται πολλαπλού τύπου. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \alpha\nu \quad x<-3 \\ x^2, & \alpha\nu \quad -3\le x\le 2 \\ -x+2, & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}.$$

Ας δούμε ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης. Δηλαδή με ποιους αριθμούς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x της συνάρτησης. Διαπιστώνουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει χωριστεί σε τρία υποσύνολα, τα (-∞,-3), [-3,2] και (2,+∞). Άρα έχουμε πάρει όλο το σύνολο των πραγματικών συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι όλο το σύνολο R.

Για να βρούμε την τιμή των διαφόρων x βλέπουμε σε ποιο από τα τρία υποσύνολα ανήκει και κατόπιν το αντικαθιστούμε στον αντίστοιχο τύπο.

πχ. Αν θέλουμε να βρούμε το f(-5), διαπιστώνουμε ότι το -5 βρίσκεται στο (-∞,-3) και συνεπώς αντικαθιστούμε το x στον αντίστοιχο τύπο δηλαδή τον 2x-1 και έχουμε 2(-5)-1=-10-1=-11 άρα f(-5)=-11.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το f(-1), διαπιστώνουμε ότι το -1 βρίσκεται στο [-3,2] και συνεπώς αντικαθιστούμε το x στον αντίστοιχο τύπο δηλαδή τον x^2 και έχουμε $(-1)^2=1$ άρα f(-1)=1.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το f(4), διαπιστώνουμε ότι το 4 είναι μεγαλύτερο του 2 και συνεπώς αντικαθιστούμε το x στον αντίστοιχο τύπο δηλαδή τον –x+2 και έχουμε -4+2=-2 άρα f(-4)=-2.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το f(2), διαπιστώνουμε ότι το 2 βρίσκεται στο [-3,2] και όχι στο (2,+∞), συνεπώς αντικαθιστούμε το x στον αντίστοιχο τύπο δηλαδή τον x^2 και έχουμε $2^2=4$ άρα f(2)=4.

Δίνεται η συνάρτηση πολλαπλού τύπου $f(x)=\begin{cases} x+1 & \alpha\nu \quad x<1 \\ 2x^2 & \alpha\nu \quad x\ge 1 \end{cases}$.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (απ: $\mathbb{R}$)

Να υπολογισθούν τα f(-2), f(1), f(3) (απ: -1, 2, 18)

Να λυθεί η εξίσωση f(x)=8 (απ: x=2)

Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις για να λύσουμε προβλήματα σε διάφορα πεδία της επιστήμης, της τεχνολογίας αλλά και της καθημερινότητας μας. Όταν αντιμετωπίζουμε μια πραγματική κατάσταση τότε καταστρώνουμε αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα, δηλαδή μοντελοποιούμε την πραγματική κατάσταση, και με την λύση του μαθηματικού προβλήματος έχουμε και την λύση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Προσπαθούμε να συνδέσουμε δηλαδή, μαθηματικές έννοιες με φυσικά φαινόμενα, οικονομικά προβλήματα, καθημερινές διεργασίες κλπ. Κατόπιν μελετώντας και επιλύοντας το μαθηματικό πρόβλημα και μεταφέροντας την λύση στο πραγματικό πρόβλημα το επιλύουμε.

Ένα τέτοιο πρόβλημα θα προσπαθήσουμε να θέσουμε και να επιλύσουμε εδώ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο Υπουργός Οικονομικών στην προσπάθειά του να δημιουργήσει μια συνάρτηση η οποία να του λέει τον φόρο που πρέπει να πληρώσει κάποιος, αν ξέρουμε τα εισοδήματά του, απευθύνθηκε σε εσάς δίνοντας σας τα εξής στοιχεία:

«Όσοι έχουν εισόδημα μέχρι και 10000€ δεν θα πληρώνει καθόλου φόρο. Όποιος έχει εισόδημα μέχρι 12.000€ θα πληρώνει για το υπερβάλλον ποσό των 10.000€ ποσοστό ίσο με 5%. (Δηλαδή θα αφαιρούμε από τα εισοδήματά του 10.000€ και θα φορολογούμε το υπόλοιπο με 5%). Όποιος έχει εισόδημα μέχρι 20.000€, εκτός από το προηγούμενο ποσό της κλίμακας των 10 έως 12 χιλιάδων ευρώ, θα πληρώνει ακόμα για το υπερβάλλον των 12.000€ ποσοστό 8%. Όποιος έχει εισόδημα μέχρι 30.000€, εκτός από τα προηγούμενα ποσό των κλιμάκων 10 έως 12 χιλιάδων ευρώ και 12 έως 20 χιλιάδων ευρώ, θα πληρώνει ακόμα για το υπερβάλλον των 20.000€ ποσοστό 15% και τέλος όποιος έχει εισόδημα πάνω από 30.000€, ακολουθώντας την προηγούμενη μέθοδο, θα πληρώνει για το υπερβάλλον των 30.000€ ποσοστό 20%».

Για την διευκόλυνση μας, έδωσε και τον επόμενο πίνακα

Κλίμακα εισοδήματος	Ποσοστό φόρου
[0 – 10000]	0%
(10000 – 12000]	5%
(12000 – 20000]	8%
(20000 – 30000]	15%
(30000 και πάνω]	20%

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι το εισόδημα του φορολογούμενου είναι x.

Τότε αν το x είναι μέχρι 10.000€ δεν θα πληρωθεί φόρος αφού το ποσοστό είναι 0%. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι αν $x \leq 10.000€$ θα πληρώσει φόρο που δίνεται από τον τύπο $x \cdot 0€$ δηλαδή $0€$.

Αν το εισόδημα x είναι ποσό πάνω από 10.000€ αλλά λιγότερο από 12.000€ τότε πρέπει να αφαιρέσουμε τα πρώτα 10.000€, άρα να μείνουν (x-10.000) και σε αυτά να επιβάλλουμε φόρο 5%. Άρα ο φορολογούμενος θα πληρώσει $(x-10.000)\cdot\frac{5}{100}€$.

Αν το εισόδημα x είναι ποσό πάνω από 12.000€ αλλά λιγότερο από 20.000€ τότε πρέπει να αφαιρέσουμε τα πρώτα 10.000€ που είναι αφορολόγητα, κατόπιν να υπολογίσουμε το φόρο για τα επόμενα 2.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 10.000 έως 12.000€) που είναι 2000€ Χ 5%=100€ και το υπερβάλλον των 12000€ που είναι (x-12000), να το επιβαρύνουμε με 8%. Άρα ο πολίτης θα πληρώσει $100€+(x-12.000)\cdot\frac{8}{100}€$.

Αν το εισόδημα x είναι ποσό πάνω από 20.000€ αλλά λιγότερο από 30.000€ τότε πρέπει να αφαιρέσουμε τα πρώτα 10.000€ που είναι αφορολόγητα, κατόπιν να υπολογίσουμε το φόρο για τα επόμενα 2.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 10.000 έως 12.000€) που είναι 2000€ Χ 5%=100€, επίσης να υπολογίσουμε το φόρο για τα επόμενα 8.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 12.000 έως 20.000€) που είναι 8000€ Χ 8%=640€, και το υπερβάλλον των 20000€ που είναι (x-20000), να το επιβαρύνουμε με 15%. Άρα ο πολίτης θα πληρώσει

$$100€+640€+(x-20.000)\cdot\frac{15}{100}€=740€+(x-20.000)\cdot\frac{15}{100}€.$$

Αν το εισόδημα x είναι ποσό πάνω από 30.000€ τότε πρέπει να αφαιρέσουμε τα πρώτα 10.000€ που είναι αφορολόγητα, κατόπιν να υπολογίσουμε το φόρο για τα επόμενα 2.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 10.000 έως 12.000€) που είναι 2000€ Χ 5%=100€, επίσης να υπολογίσουμε το φόρο για τα επόμενα 8.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 12.000 έως 20.000€) που είναι 8000€ Χ 8%=640€, και τον φόρο για τα επόμενα 10.000€ (είναι το μέρος του εισοδήματος από 20000 έως 30000€) που είναι 10000 Χ 15%=1500

€ και το υπερβάλλον των 30000€ που είναι (x-30000), να το επιβαρύνουμε με 20%. Άρα ο πολίτης θα πληρώσει

$$100€ + 640€ + 1500€ + (x - 30.000)\cdot \frac{20}{100}€ = 2240€ + (x - 30.000)\cdot \frac{20}{100}€ .$$

Όλα τα πιο πάνω μπορούμε να τα αποτυπώσουμε σε μία συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\alpha\nu \quad x \le 10.000 \\ (x-10.000)\cdot 0,05 & ,\alpha\nu \quad 10.000 < x \le 12.000 \\ 100 + (x-12.000)\cdot 0,08 & ,\alpha\nu \quad 12.000 < x \le 20.000 \\ 740 + (x-20.000)\cdot 0,15 & ,\alpha\nu \quad 20.000 < x \le 30.000 \\ 2.240 + (x-30.000)\cdot 0,2 & ,\alpha\nu \quad x > 30.000 \end{cases}$$

και μετά από πράξεις έχουμε την συνάρτηση να γίνεται

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\alpha\nu \quad x \le 10.000 \\ 0,05\cdot x - 500 & ,\alpha\nu \quad 10.000 < x \le 12.000 \\ 0,08x - 860 & ,\alpha\nu \quad 12.000 < x \le 20.000 \\ 0,15x - 2260 & ,\alpha\nu \quad 20.000 < x \le 30.000 \\ 0,2x - 3760 & ,\alpha\nu \quad x > 30.000 \end{cases}$$