ΤΑΞΗ : Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 22 Δεκεμβρίου 2016

Ωριαίο διαγώνισμα στα **Μαθηματικά Προσανατολισμού**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x^3 + 10x + 20 = 0}$, έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα της οποίας να προσδιορίσετε το πρόσημο. **(8 + 4)**

Α2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+4f(-x)}{x}=-3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(-3x)}{x^2+f^2(x)}$

(7 + 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta^2 x-2 & , \quad x>1 \\ 1 & , \quad x=1 \\ ax+\beta & , \quad x<1 \end{cases}}$

Β1. Να βρεθούν οι **α** και **β** ώστε η f να είναι συνεχής.

Β2. Με δεδομένο ότι η **f** είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση **f(x) = 0**, έχει λύση στο διάστημα **(1,4).** **(13 + 12)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = e^x - 1}$

Γ1. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης **g** για τις διάφορες τιμές του **x**.

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις **f : R → R** που ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{f^2(x) = (e^x - 1)^2}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(10 + 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση **f** συνεχής στο **R** με σύνολο τιμών το **R**, για την οποία ισχύει:

$\mathbf{f^3(x) + 5f(x) + x = 0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η **f** είναι γνησίως φθίνουσα και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{f(x - 7) < x}$

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$ **(9 + 8 + 8)**

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρώ τη συνάρτηση $\mathbf{f(x)= x^3 + 10x + 20}$.

- Η συνάρτηση είναι συνεχής στο R, ως πολυωνυμική και $\mathbf{f(0) = 20 > 0}$.
  Επίσης $\mathbf{f(-2) = -8 - 20 + 20 = -8 < 0}$.
  Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano
  (**f** συνεχής στο $\mathbf{[-2,0]}$ και $\mathbf{f(0).\ f(-2) = -160 < 0}$)
  υπάρχει $\mathbf{\xi \in (-2,0)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(\xi) = 0}$.
- Επειδή $\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 10 > 0}$, η **f** είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το **R** συνεπώς η ρίζα που βρήκαμε είναι μοναδική.
- Επειδή $\mathbf{\xi \in (-2,0) \Leftrightarrow \xi < 0}$, δηλαδή η ρίζα αυτή είναι αρνητική.

Α2.

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)}{x}$ Θέτω $\mathbf{u = -x \Leftrightarrow x = -u}$

  $x \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$

  Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{-u} = -\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = -\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

  Συνεπώς $\lim_{x\to 0}\frac{4f(-x)}{x} = -4\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

  Άρα $-3\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - 4\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{4f(-x)}{x} =$
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+4f(-x)}{x} = -3$

  Συνεπώς $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{xf(-3x)}{x^2+f^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{xf(-3x)}{x^2}}{\frac{x^2+f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(-3x)}{x}}{1+\frac{f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\,\frac{f(-3x)}{-3x}}{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = -$
  $3\,\frac{1}{1+1^2} = -\frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1$

Συνεπώς α + β² – 2 = α + β = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - \beta - 2 = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \text{ ή } \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \beta = 2\,, \alpha = -1 \\ \beta = -1\,, \alpha = 2 \end{cases}$$

Β2. $\mathbf{lim}_{x\to-\infty} \mathbf{f(x)} = +\infty \Leftrightarrow \mathbf{lim}_{x\to-\infty}(\boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta}) = +\infty \Leftrightarrow \mathbf{lim}_{x\to-\infty} \boldsymbol{\alpha x} = +\infty \Leftrightarrow$ **α < 0.**

Άρα **α = – 1** και **β = 2.**

Άρα $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ -x + 2 & , \quad x < 1 \end{cases}$

Η f συνεχής στο R , άρα και στο διάστημα **[1,4]** με **f(1) = 1 > 0** και **f(4) = – 16 + 16 – 2 =– 2 < 0.**

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (1,4).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **g(x) = eˣ – 1 => g'(x) = eˣ > 0,** για κάθε **x** ∈ r **,** Συνεπώς **g(x) [** για κάθε **x** ∈ ℝ .

Όμως **g(0) = e⁰ – 1 = 1 – 1 = 0.**

Άρα **x < 0 => g(x) < g(0) = 0**
x > 0 => g(x) > g(0) = 0.

Γ2. **f²(x) =(eˣ – 1)²** .

f(x) = 0 ⇔ f²(x) = 0 ⇔ =(eˣ – 1)² = 0 ⇔ **eˣ – 1 = 0 ⇔ eˣ = 1 ⇔ eˣ = e⁰ ⇔ x = 0.**

Άρα η **f** που έχει πεδίο ορισμού το R μηδενίζεται στο **0** (μοναδική ρίζα)
Επειδή είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της **(-∞ , 0)** και **(0,+∞).**

Άρα η **f** μπορεί να έχει τα παρακάτω πρόσημα.

-∞	0	+∞
+		+
−		+
+		−
−		−

Επειδή λοιπόν $e^x - 1 > 0$, όταν $x > 0$ και $e^x - 1 < 0$, όταν $x < 0$, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x < 0 \\ e^x - 1 & x > 0 \end{cases}$ πρόσημα + +
2. $f(x) = e^x - 1$ πρόσημα - +
3. $f(x) = 1 - e^x$ πρόσημα + -
4. $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ 1 - e^x & x > 0 \end{cases}$ πρόσημα - -

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f^3(x) + 5f(x) + x = 0 \Leftrightarrow x = -f^3(x) - 5f(x)$

Έστω $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -f^3(x_1) - 5f(x_1) < -f^3(x_2) - 5f(x_2) \Leftrightarrow$

$$f^3(x_2) - f^3(x_1) + 5f(x_2) - 5f(x_1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x_2) - f(x_1))\,(f^2(x_2) + f(x_2)f(x_1) + f^2(x_1)) + 5(f(x_2) - f(x_1)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x_2) - f(x_1))\,(f^2(x_2) + f(x_2)f(x_1) + f^2(x_1) + 5) < 0 \quad (1)$$

Αν θεωρήσω την παράσταση $f^2(x_2) + f(x_2)f(x_1) + f^2(x_1)$ σαν τριώνυμο με μεταβλητή το $f(x_2)$, η διακρίνουσα του είναι $\Delta = f^2(x_1) - 4f^2(x_1) = -3f^2(x_1) < 0$.

Συνεπώς η παράσταση $f^2(x_2) + f(x_2)f(x_1) + f^2(x_1)$ είναι πάντα θετική , άρα $f^2(x_2) + f(x_2)f(x_1) + f^2(x_1) + 5 > 0$

Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow$

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση έχουμε $f^3(x) + 5f(x) + x = 0 \Leftrightarrow$

$y^3 + 5y = -x \Leftrightarrow x = -y^3 - 5y \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -x^3 - 5x$

Δ2. $f(x-7) < x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x-7)) > f^{-1}(x)$ (επειδή $f^{-1}(x)$] , όπως και η f)

$\Leftrightarrow x - 7 > -x^3 - 5x \Leftrightarrow x^3 + 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x^3 - x + 7x - 7 > 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1) + 7(x-1) > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) + 7(x-1) > 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2 - x + 7) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

(επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική , άρα το τριώνυμο θετικό)

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3-5x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-x^3-5x}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2-5}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{-0-5}{1}=-5$