Άσκηση 1η **(GI V ALG 4 22734)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν Ε=30cm^2 του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς (σε cm), τότε:

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί x και y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\frac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$ (Μ4)

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$ (Μ4)

γ. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου (Μ12)

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μ5)

Άσκηση 2η **(GI V ALG 4 22762)**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου τα α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το x+1 αφήνει υπόλοιπο 16+P(1) και διαιρούμενο με x-1 αφήνει υπόλοιπο 16-P(-1),τότε:

α) να αποδείξετε ότι P(1)=0 και P(-1)=16 (Μ 8)

β) να αποδείξετε ότι α=4 και β=-3 (Μ 9)

γ) να αποδείξετε ότι το γινόμενο $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)$ είναι διάφορο του μηδενός (Μ 8)

Άσκηση 3η **(GI V ALG 4 22764)**

Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε P(1)=0 και P(2)=8.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$. (Μ10)

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x)=8. (Μ 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση P(x)>2. (Μ 9)

Άσκηση 4η (GI V ALG 4 22766)

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda,\quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1 είναι ίσο με -4 (Μ 7)

β) Για κ=1 και λ=-2

1. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x-1. (Μ 5)
2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+4=x^2-1$. (Μ 7)
3. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$ (Μ 6)

Άσκηση 5η (GI V ALG 4 22769)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ όπου α και β είναι πραγματικοι αριθμοί

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το x+1 είναι ίσο με -6, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β (Μ 7)

β) Αν α=-5 και β=1, να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 (Μ 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2συν^3ω+5ημ^2ω+συνω-3=0$ (Μ 10)

Άσκηση 6η (GI V ALG 4 22772)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ όπου κ και λ είναι πραγματικοι αριθμοί.

α) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x+2 (Μ 7)

β) Για κ=-7 και λ=6 να λυθεί η εξίσωση P(x)=0 (Μ 9)

γ) Για κ=-7 και λ=6 να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5}\geq 0$ (Μ 9)

<u>Άσκηση 7η</u> **<u>(GI V ALG 4 22773)</u>**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το x είναι ίσο με το 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β (Μ 8)

β) Για α=1 και β=0, να λύσετε

1. Την ανίσωση $P(x)\geq 0$ (Μ 8)
2. Την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$ (Μ 9)

<u>Άσκηση 8η</u> **<u>(GI V ALG 4 22774)</u>**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, όπου ο α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μ 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες $(x-\alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μ 6)

γ) Αν α=-1, τότε:

1. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$ (Μ 6)
2. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\cdot P(x)\leq 0$ (Μ 6)