

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι το είδος των ριζών της εξίσωσης $2^{\text{ου}}$ βαθμού $ax^2+bx+c=0$ και η μεταξύ τους σχέση.

Πρέπει να ξέρουμε ότι η εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού έχει 2 ρίζες, ή μία διπλή (δηλαδή δύο φορές την ίδια ρίζα) ή καμία ρίζα, ανάλογα τι είναι η διακρίνουσα, θετική, αρνητική ή μηδέν αντίστοιχα, πράγμα που ήδη γνωρίζουμε. Ας τα επαναλάβουμε όμως.

Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες, οι οποίες μπορεί να είναι δύο θετικές ή δύο αρνητικές ή δύο ετερόσημες, δηλαδή μία αρνητική και μία θετική.

Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα (δηλαδή δύο φορές τον ίδιο αριθμό) ή οποία μπορεί να είναι είτε αρνητική είτε θετική είτε μηδέν.

Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή δεν έχει ρίζα πραγματικό αριθμό.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις βλέπουμε ότι δεν έχουμε καμία πληροφορία για το πρόσημο των ριζών ή για την μεταξύ τους σχέση.

Τέτοιες πληροφορίες θα πάρουμε από το γινόμενο και το άθροισμα των δύο ριζών $P = x_1 \cdot x_2 = c/a$ και $S = x_1 + x_2 = -b/a$. Πιο συγκεκριμένα.

Ας μελετήσουμε μερικές περιπτώσεις αν $\Delta > 0$.

Τότε αν $P > 0$ έχουμε δύο ρίζες διαφορετικές (άνισες) ομόσημες άρα δύο θετικές ή δύο αρνητικές και συνδυάζοντας το S μπορούμε να δούμε αν είναι θετικές ή αρνητικές. Πχ αν έχουμε $\Delta > 0$, $P > 0$ και $S < 0$ έχουμε δύο ρίζες άνισες ($\Delta > 0$), ομόσημες ($P > 0$), οι οποίες είναι αρνητικές ($S < 0$).

Αν $P = 0$ (γινόμενο των δύο ριζών είναι μηδέν) τότε μια τουλάχιστον από τις δύο είναι μηδέν και η άλλη θα καθοριστεί από το άθροισμα S . Έτσι αν το άθροισμα S είναι θετικό τότε η άλλη ρίζα είναι θετική, ενώ αν το άθροισμα είναι αρνητικό ή άλλη ρίζα είναι αρνητική. Φυσικά δεν μπορεί εδώ το άθροισμα να είναι μηδέν διότι με δεδομένο ότι η μία ρίζα είναι το μηδέν αν ήταν και η άλλη μηδέν τότε η εξίσωση θα είχε μία διπλή ρίζα το μηδέν άρα θα ίσχυε $\Delta = 0$, πράγμα που δεν ισχύει αφού $\Delta > 0$. Ανάλογα πράγματα ισχύουν και σε άλλες περιπτώσεις.

Αναλυτικά μπορεί κανείς να μελετήσει τον πιο κάτω πίνακα για όλες τις περιπτώσεις.

Δ	P	S	Τι γίνεται με τις ρίζες;
+	+	+	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ομόσημες ($P > 0$), θετικές ($S > 0$)
		0	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ομόσημες ($P > 0$), αντίθετες ($S = 0$)
		-	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ομόσημες ($P > 0$), αρνητικές ($S < 0$)
	0	+	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), μία ίση με μηδέν ($P = 0$), και η άλλη θετική ($S > 0$)
		0	Επειδή $P = 0$ έχουμε μία ρίζα ίση με μηδέν και επειδή $S = 0$ είναι και η άλλη μηδέν πράγμα που δεν μπορεί να ισχύει αφού $\Delta > 0$ δηλαδή ρίζες άνισες
		-	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), μία ίση με μηδέν ($P = 0$), και η άλλη αρνητική ($S > 0$)
	-	+	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ετερόσημες ($P < 0$), με την θετική μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της αρνητικής ($S > 0$)
		0	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ετερόσημες ($P > 0$), με ίσες απόλυτες τιμές ($S = 0$)
		-	Δύο ρίζες πραγματικές άνισες ($\Delta > 0$), ετερόσημες ($P > 0$), με την θετική μικρότερη από την απόλυτη τιμή της αρνητικής ($S < 0$)
0	+	+	Μία διπλή ρίζα ($\Delta = 0$), θετική.
		0	Αδύνατη περίπτωση διότι πρέπει να υπάρχει μία διπλή ρίζα, η οποία λόγω του $S = 0$ πρέπει να είναι ο αριθμός μηδέν και ταυτόχρονα λόγω του θετικού P πρέπει να είναι θετική.
		-	Μία διπλή ρίζα ($\Delta = 0$), αρνητική.
	0	+	Αδύνατη περίπτωση διότι έχουμε διπλή ρίζα με τετράγωνο ίσο με μηδέν (άρα είναι το μηδέν) και ταυτόχρονα θετική.
		0	Διπλή ρίζα με τετράγωνο ίσο με μηδέν άρα διπλή ρίζα το μηδέν.
		-	Αδύνατη περίπτωση διότι έχουμε διπλή ρίζα με τετράγωνο ίσο με μηδέν (άρα είναι το μηδέν) και ταυτόχρονα αρνητική.
	-	+	Αδύνατη περίπτωση διότι έχουμε μία διπλή ρίζα ($\Delta = 0$), της οποίας το τετράγωνο είναι αρνητικό αφού P αρνητικό.
		0	
		-	
-	+	+	Δεν έχουμε ρίζες πραγματικές.
		0	
		-	
	0	+	
		0	
		-	
	-	+	
		0	
		-	